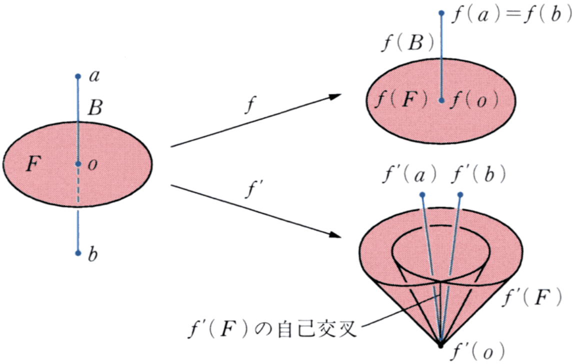
共立講座　21世紀の数学

23

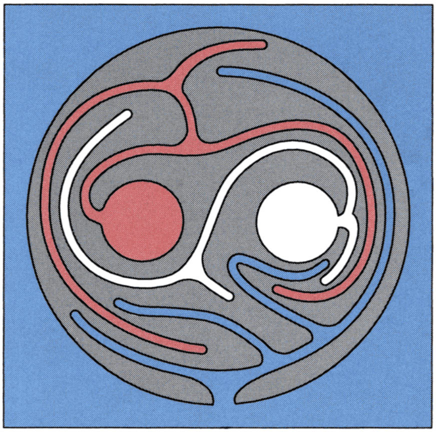
幾何学的トポロジー

本間　龍雄・他著

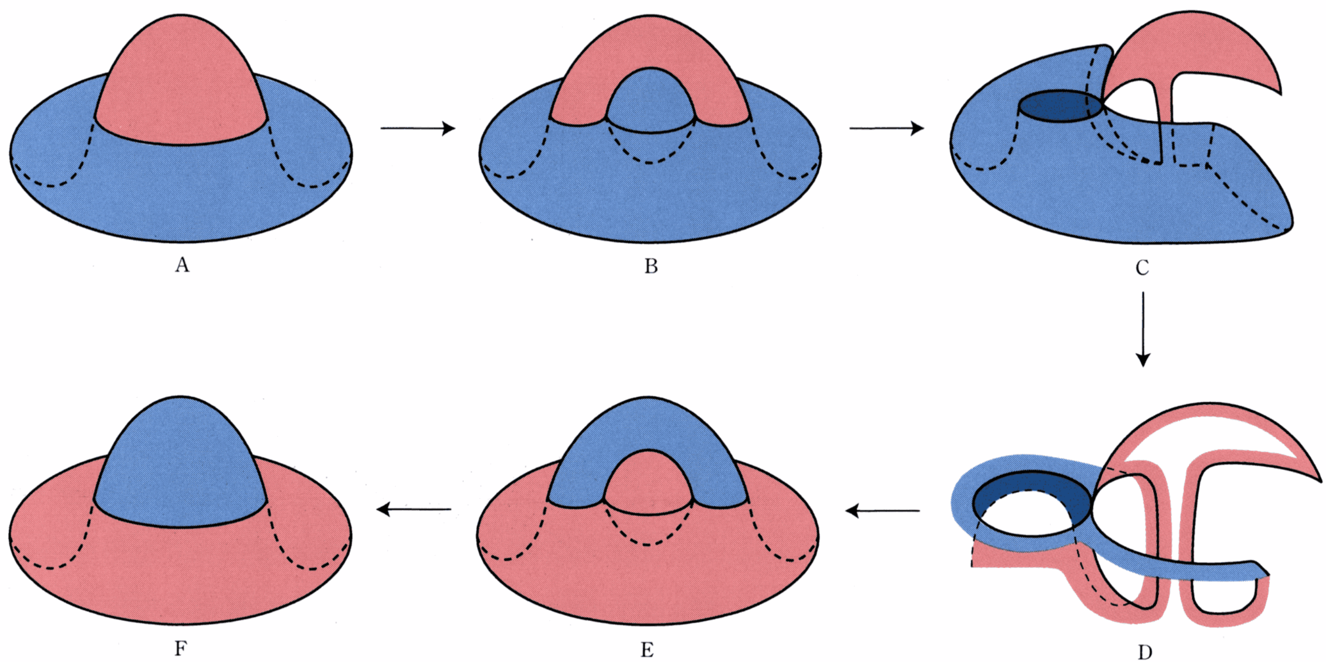
共立出版株式会社



折返し分岐点 o とその像の近傍の図で，F（赤）は折返し曲面，B（青）は分岐曲線，f は良い写像，f' は f の一般の位置近似である．図 7.1，図 7.66，図 7.67，図 7.68，図 7.69，図 7.70，図 7.71 に折返し分岐像の図があるが，視点の違いにより図は異なる．良い写像を一般の位置に修正した際に局所的にみると $f'(o)$ の近傍のシンギュラリティーがもっとも複雑である．言い換えると良い写像は局所的にはじつに簡単な写像である．閉曲面から空間への連続写像を修正したとき，局所同相でない点はブランチポイント（自己交叉曲線の端点）のみにできる．図 1.5（射影平面のクロスキャップの頂点），図 1.21，図 1.22，図 7.84 を参考にしてほしい．折返し分岐点像における折返し曲面像はブランチポイントの近傍と同じである．



無限反覆法で運河掘削を続けると陸地は 3 つの領域（白，赤，青）の同一の境界に収束する．



球面の裏返しの経過を示す図で，図 A，B，C，D，E，F の順に裏返しは進行する．表は青色，裏は赤色で画いてある．図 A は本文の図 4.25～4.36，図 B は図 4.37～4.40 に詳しく説明してある．図 E，F はそれぞれ図 B，A を裏返した図である．マラソンにたとえると，本文の図 4.44 がその折返し点である．この図は対称性があって，アイソトピーで図の表（裏）を裏（表）にできる．その後は今きた道を逆にたどってゴールに到達する．本文の図 4.43 は複雑で彩色不可能なので，その主要部分に当たる領域 D_1^2 と D_1^2の境界の近傍を図 C，D（図 4.45，4.46）で示した．

刊行にあたって

基礎科学としての数学の重要性は近年ますます増えている．にもかかわらず理工系離れがすすんでいる．その根底には数学離れがある．高等学校の数学教育も新課程に移行し，大学における数学教育も多様化しつつある．

このような状況において渇望されているのは，多様なニーズにこたえる個性的な教科書である．われわれは，現在の数学体系を大胆に再構成した大学の教科書を模索した．旧来の理学部数学科が変貌しつつある現在，有機的なつながりのなかでこそ，多面的な理解や多様な目的にあわせた自由な選択が可能になると信ずる．

きたるべき時代 21 世紀へ向けて，この新しい構成の教科書「共立講座 21 世紀の数学」を世に問う．

編集委員

まえがき

「無限と連続」は数学者がでっちあげた虚の世界と思っている人が多い．文明の初めから無限と有限，連続と離散の間を人間は揺れ動いている．現代の情報化社会でもアナログとデジタルの対立としてその流れは続いている．無限を有限化し，連続を離散化する戦いの最前線に立つ数学がトポロジーである．20 世紀における大きな成果のひとつが 3 次元多様体の基本予想，三角形（単体）分割問題の解決（第 3 章）である．その結果 3-多様体の位相構造，PL（区分的線形）構造，微分構造の間のギャップがなくなり（高次元では存在する），離散化の道が切り拓かれた．その好例が 3-多様体のハンドル分解（第 5 章）であり，PL 的，微分的のどちらの手法を用いても簡明にハンドル分解ができることが興味深い．

連続性の離散化問題は 3 次元でも終わっていない．21 世紀に残された課題がいくつかある．そのひとつが 3-多様体の間の連続写像の離散化である．良い写像（第 7 章）はその課題に対する問題提起である．良い写像はもっとも簡単な問題 $y=x^2$ と複素関数 $\omega = z^2$ により定義されるが，連続写像を良い写像で近似する方法は PL 的である．そのシンギュラリティー（特異点集合）は折返し曲面と分岐曲線のみで，両者は折返し分岐点で横断的に交わっていて，局所的には単純な構造をしている．良い写像は PL 写像や微分写像より離散化が進んでいる．

$f:S^3 \to M^3$（S^3 は 3-球面，M^3 は有向閉 3-多様体）が写像度 $\neq 0$ の良い写像であれば，M^3 の構造は簡明で分類も可能ではないかと予想される．そのような M^3 の具体的な例がレンズ空間（第 2 章）である．現在 $f:S^3 \to M^3$ のシンギュラリティーの解消する方法を研究中であるが，それが可能ならば 3 次元ポアンカレ予

想は肯定的に解決する．なぜなら M^3 が単連結であれば，同相写像 $g:\ S^3 \to M^3$ がただちにつくれるからである．f の折返し曲面を解消することはやさしそうなので，f のシンギュラリティーは分岐曲線 $(\subset S^3)$ とする．この分岐曲線を解消する問題はスミスの定理（第 6 章）と同値と想像されるので，望みなきにあらずである．すべてのシンギュラリティーが解消すると普遍被覆 $g: S^3 \to M^3$を得る．

良い写像 $f: S^3 \to M^3$ が与えられたとき，S^3 の等高球面 $S_t^2, 0 < t < 1,$（南極，北極の高さは 0，1）の像 $f(S_t^2)$ は M^3 内のホモトピーで，正則ホモトピーに近い性質をもつ．球面の裏返し（第 4 章）で扱う正則ホモトピーは格好な参考資料である．第 4 章，第 7 章を始めとして本書は図が豊富であり，式が非常に少ない．それが幾何学的であるゆえんである．まず図をしばらく観賞してから文章を読むのもひとつの方法である．第 1 章，3 次元の幾何学的トポロジー，は本書の基礎であるからきちんと読まねばならない．その他の章はかなり独立しているから，読む順は好みや必要に応じて選んでよい．

目　　次

1

3次元の幾何学的トポロジー

3次元の幾何学的トポロジーとは

位相空間と連続写像について調べる学問を，一般に“トポロジー”とよんでいる．トポロジーは，研究対象とする位相空間の違い，取り扱う手法や目的の違いによって，今日ではさまざまな分野に細分化され，それぞれに精密な理論が構築されている．しかし，トポロジーが学問として歩き始めた当初は，曲面の性質を調べたり，ユークリッド空間内の図形の性質を調べたりすることに深い関心がよせられた．トポロジーが“ゴム膜の幾何学”という愛称でよばれるのはこのような理由による．その流れを汲んだ分野が“3次元の幾何学的トポロジー”である．対象とする位相空間はおもに3次元のコンパクトな多様体であり，その組合せ構造を手がかりに，図形を直接に観察しながら調べていく手法が多くとられる．その意味では“低次元の初等トポロジー”とよぶほうがふさわしいかもしれない．扱う題材は具体的で豊富なので，誰もが自分流の楽しみ方を見いだせる分野である．トポロジーの諸分野の研究を旅にたとえるならば，飛行機の旅，船の旅，電車の旅などいろいろあるなかで，“3次元の幾何学的トポロジー”は，素敵な草花やかわいい小鳥に出会う楽しみを期待して，あちらこちらと野山を歩く旅であるといえよう．

この章ではまず，3次元の幾何学的トポロジーに関連する話題の一端を紹介し，組合せ構造をもった空間を扱う理由を述べる．つぎに複体と多面体のトポロジーについての基礎的な概念を紹介する．最後に連続写像の PL 近似を紹介する．

1.1　ユークリッド空間

高校で慣れ親しんできた直線，平面，空間は，数学におけるもっとも基本的な空間である．これらの空間を統一的に記述できるように一般化したものが n 次元ユークリッド空間である．幾何学的トポロジーでは多様体を研究対象とすることが多いが，多様体とは局所的にユークリッド空間の性質をもった空間のことである．ユークリッド空間について明確に述べることから始めよう．

1.1.1　位相空間

Xを集合，$\{U\}$ を X の部分集合の族とする．$\{U\}$ がつぎの3つの公理：

1. $X \in \{U\}$ かつ $\emptyset \in \{U\}$　（ただし $\emptyset$ は空集合を表す）
2. $U_1, U_2 \in \{U\}$ ならば　$U_1 \cap U_2 \in \{U\}$
3. $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \{U\}$ ならば $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \{U\}$

を満たすならば，$\{U\}$ を X の**開集合系**（system of open sets）といい，$\{U\}$ の元を**開集合** (open set) という．開集合 U の補集合 $X - U$ を**閉集合** (closed set) という．集合 X に1つの開集合系が指定されたとき，X に**位相** (topology) が導入されたといい，$\{X, \{U\}\}$ を**位相空間** (topological space) という．開集合系 $\{U\}$ を明示する必要がないときはたんに位相空間 X ということも多い．

$f : X \to Y$ を位相空間 X から位相空間 Y への写像とする．Y の任意の開集合 V の原像 $f^{-1}(V)$ が X の開集合になるならば，f を**連続写像** (continuous map) という．f が X から Y の上への1対1連続写像で，$f^{-1} : X \to Y$ も連続写像であるならば，f を**同相写像**（homeomorphism）という．X から Y への同相写像が存在するとき $X \approx Y$ と書き，X と Y は**同相**（homeomorphic）であるという．

トポロジーとは，同相な位相空間はすべて同じ空間であるとみなし，そのうえで，位相空間とそれらの間の連続写像について調べていく学問のことである．

$\{U\}$ を位相空間 X の開集合系，$\{B\}$ を $\{U\}$ の部分集合とする．任意の点 $x \in U \in \{U\}$ に対して $x \in B \subset U$ となる $B \in \{B\}$ が存在するならば，$\{B\}$ を $\{U\}$ の**基**（base）という．この集合族 $\{B\}$ を基とする開集合系は必然的に $\{U\}$ 自身になるので，位相空間 $(X, \{U\})$ のことを $(X, \{B\})$ と表すことも多い．

問題 1.1　3 点からなる集合 $X = \{a, b, c\}$ の部分集合の族 (1) ～ (4) のそれぞれについて，それらのすべての部分集合を X の開集合として含むような最小の開集合系を求めよ．

(1)　$\{\{a\}\}$,　　(2)　$\{\{a\}, \{b\}\}$,　　(3)　$\{\{a, b\}\}$,

(4)　$\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$

位相空間 $(X, \{U\}), (Y, \{V\})$ に対して，X と Y の直積集合

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

に

$$\{U \times V\} = \{U \times V | \ U \in \{U\}, V \in \{V\}\}$$

を基とする開集合系で位相を導入することにより，位相空間 $(X \times Y, \{U \times V\})$ が得られる．これを X と Y の**直積空間**（product space）という．

$(X, \{U\})$ を位相空間，A を X の部分集合とする．そのとき $\{U \cap A\} = \{U \cap A \,|\, U \in \{U\}\}$ は A の開集合系になる．$\{U \cap A\}$ が定める A の位相を**相対位相**（relative topology）といい，$(A, \{U \cap A\})$ を X の**部分位相空間**（topological subspace）という．断わらないかぎり，位相空間の部分集合には相対位相が導入されているものとする．

集合 X の任意の 2 元 x, y に対して，実数 $\rho(x, y) \geq 0$ が定められていてつぎの 3 つの公理:

(i)　$\rho(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$

(ii)　$\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iii)　$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

を満たすならば，$\rho(x, y)$ を 2 点 $x, y \in X$ の**距離**（metric）という．このとき，(X, ρ)（またはたんに X）を**距離空間** (metric space）という．距離空間 X の任意の部分集合 A は，X の距離をそのまま利用することにより，距離空間になる．このときの A を X の**部分距離空間**（metric subspace）という．

距離空間 X の点 x に対し，

$$V_\varepsilon(x) = \{y \in X | \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

を x の ε -**近傍**（ε-neighborhood）という．距離空間 X には，断わらないかぎり，

$$\{V_\varepsilon(x) \mid x \in X,\ \varepsilon \text{ は正の実数}\}$$

を基とする位相が導入されているものとする．X の部分距離空間 A の（距離から導入された）位相は X の相対位相と一致することがわかる．

距離空間 $(X,\rho_X),(Y,\rho_Y)$ に対して，$X \times Y$ の2点 $p=(x_1,y_1)$ と $q=(x_2,y_2)$ の距離 $\rho(p,q)$ を

$$\rho(p,q)=\sqrt{\rho_X(x_1,x_2)^2+\rho_Y(y_1,y_2)^2}$$

と定めることにより，直積集合 $X \times Y$ は自然に距離空間になる．この $X \times Y$ を X と Y の**直積距離空間**（product metric space）という．

1.1.2　ユークリッド空間

直線や平面を一般化して，n 次元ユークリッド空間をつぎのように定義する．

【定義 1.1】 任意の2つの実数 x,y に対して，その距離を

$$d(x,y)=|\,y-x\,|$$

と定める．この距離で実数全体の集合 R は距離空間になる．そこで，$R^1=R, R^n=R^{n-1}\times R^1$ により帰納的に得られる直積距離空間 R^n を n **次元ユークリッド空間**（euclidean n-space）という．R^k $(k<n)$ を R^n の部分距離空間

$$\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0)\in R^n\}$$

と同一視することがある．

$$H^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n \mid x_n \geq 0\}$$

を n **次元半空間**（half n-space）という．

$$B^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leq 1\}$$

を**単位 n-球**（unit n-ball）または**単位 n-球体**といい，

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

を**単位 $(n-1)$-球面**（unit $(n-1)$ -sphere）という．これらも R^n の部分距離空間と考える．単位 n -球および単位 $(n-1)$ -球面と同相な位相空間を **n 次元球**（または n **次元球体**，n -ball）および **$n-1$ 次元球面**（$(n-1)$-sphere）という．これらもそれぞれ（記号を節約して）同じく，B^n， S^{n-1} と表すことが多い．B^2, S^1 はそれぞれディスク，円周（と同相な図形）である．

問題 1.2 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n, y = (y_1, y_2, \cdots, x_n) \in R^n$ に対して R^n における距離 $d(x, y)$ は

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

と表されることを確かめよ．

■ **例 1.1** ■ 平面内の凸多角形 P を考えよう．ただし，"凸多角形 P" というとき，ここでは中身まで込めたものを指すことにし，周囲だけを考えているときは∂P と書くことにする．いま，P の内部に 1 点 O を選び，O を中心とする円周 S^1 を考える（図 1.1）．中心 O から放射状に半直線を出すことにより，∂P 上の点と円周 S^1 上の点を 1 対 1 に対応させることができる．この対応を O からの**中心射影**とよぶ．このとき周 ∂P 上の近い 2 点は S^1 上の近い 2 点と対応しあっているから，

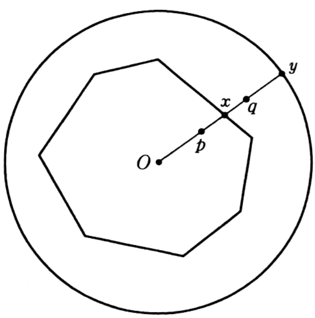


図 1.1 凸多角形からディスクの上への同相写像の構成法

中心射影は凸多角形の周囲から円周の上への1対1両連続写像，すなわち同相写像になっている．また，この中心射影を利用して，凸多角形 P とディスク B^2 との間の同相写像をつぎのようにしてつくることができる．p を P の任意の点とする．$p \neq O$ であれば半直線 Op と ∂P との交点 x が一意に定まり，さらに $p \neq x$ であれば p は線分 $\overline{Ox}$ の内分点である．その内分比を $t:1-t$ とする．点 x に対応する円周上の点を y とするとき，線分 $\overline{Oy}$ を $t:1-t$ の比に内分する点を q とする．そのとき，p を q に対応させる対応が求める同相写像になっている．もちろん，射影の中心 O は自分自身に，x は y に移せばよい．

ユークリッド空間 R^n 内の図形 A を時間とともに少しずつ変化させて同相な図形 $B \subset R^n$ に重ね合わせることができるとき，この連続的な同相変形のことをアイソトピーという．この概念を正確に述べておこう．

写像の族 $\{h_t\} = \{h_t : R^n \to R^n | 0 \geq t \geq 1\}$ が A を B に移す**アイソトピー**（isotopy）である，というのは，

1. h_0 は恒等写像，
2. $h_1(A) = B$,
3. 各 t に対して h_t は同相写像，
4. パラメータ t に関して $\{h_t\}$ は連続，すなわち

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,;\, x \in R^n,\ 0 < s < \delta \Longrightarrow d(h_t(x), h_{s+t}(x)) < \varepsilon$$

が成り立つことである．このとき A と B は**アイソトピック**（isotopic）であるという．

平面内の凸多角形はディスクとアイソトピックである．例1.1で，時刻 t $(0 \leq t \leq 1)$ をパラメータとして，凸多角形をディスクに移すアイソトピー $h_t : \overrightarrow{Op} \mapsto (1-t)\overrightarrow{Op} + t\overrightarrow{Oq}$ をつくることができる．一般に，ユークリッド空間内の同相な図形どうしがいつでもアイソトピーで移り合えるわけではないが，図形の間の同相写像がアイソトピーから得られるときは，時間の経過とともに変化する図形の様子がイメージできるのでわかりやすく，便利である．

■ **例 1.2** ■　ディスクから小さなディスクを取り除いた図形，すなわち

$$A = \{(x, y) \in R^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\},$$

と同相な図形を**アニュラス**（annulus）という．A を 3 次元空間 R^3 内の図形，すなわち $A \subset R^2 = R^2 \times \{0\} \subset R^3$ とみなしたとき，点 Q （0, 0, 2）を中心とする中心射影により，**円筒**（cylinder）：

$$B = \{(x, y, z) \in R^3 | x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

は A とアイソトピック，すなわちアニュラスであることがわかる（図 1.2）．また，$A \cup B$，あるいはそのコーナー部分を丸くしたものも，アニュラス A とアイソトピックである（なぜか？）．

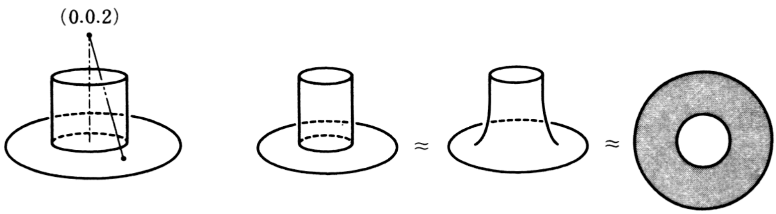


図 1.2　アニュラスのさまざまな姿態

上の例 1.1，例 1.2 からもわかるように，角ばっているか，丸っこいか，といった形状の違いはトポロジーでは本質的ではない．

■ **例 1.3** ■　開区間 $(-1, 1)$ は直線 R^1 と同相である．このことは，半円：

$$C = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + (y-1)^2 = 1, y < 1\}$$

を利用するとわかりやすい．正射影の逆写像から得られる開区間 $(-1, 1)$ から半円 C への同相写像を f とし，円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ の中心 $P(0, 1)$ からの中心射影で得られる半円 C から直線 R^1 への同相写像を g とすれば，合成写像 $g \circ f$ は開区間 $(-1, 1)$ から直線 R^1 への同相写像になる（図 1.3）．この方法は容易に一般化できるから，$\mathrm{Int}\, B^n \approx R^n$ であることがわかる．ただし，$\mathrm{Int}\, B^n$ とは n **次元開球**（open n-ball），すなわち $B^n - S^{n-1}$ のことである．

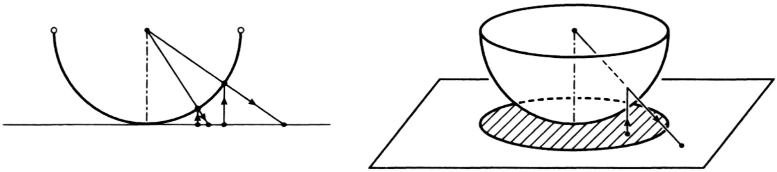


図 1.3　中心射影を利用した同相写像の構成

■ **例 1.4** ■　単位球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

の北極 $N(0,0,1)$ からの**極射影**により，$S^2 - \{N\}$ から平面 $R^2 = \{(x, y, 0) \in R^3\}$ の上への同相写像をつくることができる．したがって $S^2 - \{N\} \approx R^2$ である (図 1.4)．見方を変えて，球面 S^2 は平面 R^2 に無限遠点 ∞ を付加して得られたもの（と同相）である，といってもよい．一般の n 次元球面 $(n \geq 1)$ についても事情は同じで，$S^n \approx R^n \cup \{\infty\}$ である．

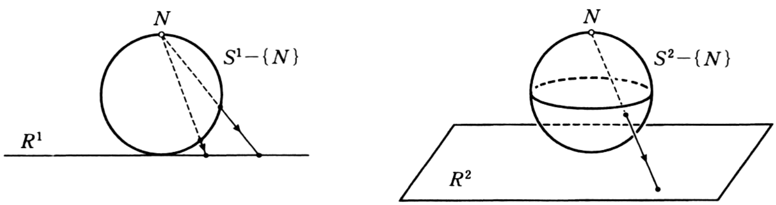


図 1.4　極射影を利用した同相写像の構成

1.2　多　様　体

1.2.1　曲　　面

これまでに出てきた図形のうち，球面，ディスク，アニュラスなどを**曲面** (surface) というが，さらにいくつかの曲面を挙げておこう（図 1.5)．

トーラス（torus）: 2 つの円周 S^1 の直積として得られる図形 $T^2 = S^1 \times S^1$.

射影平面（projective space）: 単位ディスクの縁の対心点どうしを貼り合わせて得られる図形．これは 3 次元空間 R^3 の中では実現できないが，強引に縫い合わせていくと，図 1.5 のようになるので，**クロスキャップ**（crosscap）付き球面ともよばれている．

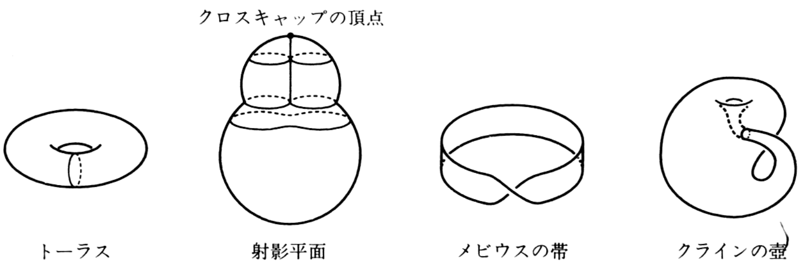


図 1.5　曲面の例

メビウスの帯（Möbius band）: 細長いテープの両端を半ひねりして貼り合わせたもの．

クラインの壺（Klein bottle）: メビウスの帯を 2 つ用意し，それぞれの周囲どうしを縫い合わせてつくった図形．これも 3 次元空間の中では実現できない．

ディスクやメビウスの帯は 1 つの縁を，アニュラスは 2 つの縁をもっている（あとではこれらの縁のことを境界とよぶ）．縁をもたない曲面，たとえばトーラス，射影平面，クラインの壺などを**閉曲面**（closed surface）という．

さて図 1.6 は“ハンドル付きディスク”とよばれる図形の絵である．図 1.6(a) はディスクから小さなディスクを 2 つ取り去り，その円周の部分へ湾曲させた円筒の両端を接着したものである．くっつけた円筒部分を**ハンドル**（handle）という．図 1.6(b) はハンドルの付け根付近をなめらかにしたもので，位相的には図 1.6(a) と何ら変わるところはない．ハンドルの一方の端をディスクの裏側から付けるようにすると，図 1.6(c) のようになるが，この図形は図 1.6(a) とは同相にならない．このことを直観するには，それぞれの曲面にカタツムリを這わせてみればよい．図 1.6(b)（=図 1.6(a)）では，カタツムリは（縁から裏へと回り込まないかぎり）表

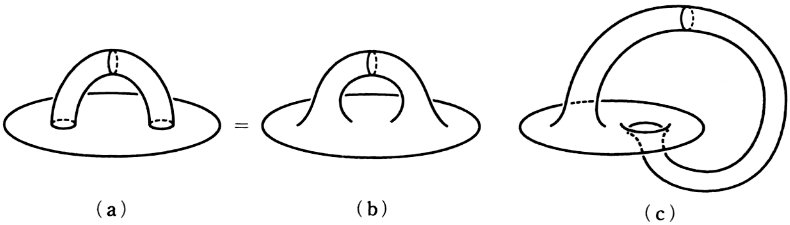


図 1.6　ハンドル

面しか動き回ることはできないが，図 1.6(c) ではハンドルに沿って自然に裏へ回り込むことができる．これらの性質の違いから，図 1.6(a) と図 1.6(c) は位相的に異なる曲面であることがわかる．

図 1.6 で描かれた 2 種類の曲面はひとつの縁をもつが，もちろんディスクでもメビウスの帯でもない．じつは，図 1.6(a)，図 1.6(c) はそれぞれ，トーラス，クラインの壷からひとつの小さなディスクを取り除いたもの（と同相）である．いろいろな図を描いて，なぜそうなるのか，あれこれと考え抜くと，自然に直観（$\neq$ 直感）の力が身に付くであろう．ディスクの代わりに，メビウスの帯にハンドルを接着した場合にはどうなるか考えてみるのも楽しい．

いろいろな曲面に，同様な方法でハンドルを接着することにより，つぎつぎに新しい曲面をつくることができる．たとえば，球面にハンドルをひとつ付けるとトーラスができるし，さらにもうひとつハンドルを付ければ 2 人乗りの浮き輪ができる．ハンドルの一方の端を球面の表側に，他方の端を裏側からくっつけると，クラインの壷ができる（ただし，この作業を 3 次元空間 R^3 の中で具体的に実行することはできない）．

1.2.2　多　様　体

平面の概念を一般化してユークリッド空間の概念を得たように，前節の曲面の概念を明確にして，“一般次元の曲面” すなわち “多様体” という概念を確立しておこう．

X を位相空間とする．点 $x \in X$ を含む部分集合 N に対し，$x \in U \subset N$ なる開

集合 U がとれるならば，N を x の**近傍**（neighborhood）という．とくに，N 自身が X の開集合であるとき，N を x の**開近傍**（open neighborhood）という．位相空間 X の任意の 2 点 x, y に対し，これらの近傍 N_x, N_y で，$N_x \cap N_y = \emptyset$ となるものがとれるとき，X を**ハウスドルフ空間**（Hausdorff space）という．

■ **例 1.5** ■ 位相空間 X がユークリッド空間 R^n と同相な近傍をもつならば，X は**局所ユークリッド的**（locally euclidean）であるという．局所ユークリッド的であってもハウスドルフ空間であるとはかぎらない．その例を挙げておこう．平面内の 3 本の線分：

$$A = \{(x,1) \in R^2 | -1 < x \leq 0\},$$
$$B = \{(x,0) \in R^2 | 0 < x < 1\},$$
$$C = \{(x,-1) \in R^2 | -1 < x \leq 0\}$$

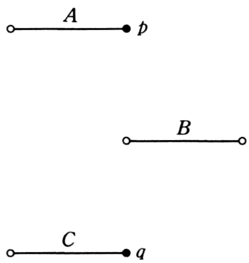


図 1.7 局所ユークリッド的だがハウスドルフ空間でない例

からなる集合 $X = A \cup B \cup C$ について考える（図 1.7）．2 点 $p = (0,1) \in A$, $q = (0,-1) \in C$ に対して，その ε -近傍を

$$V_\varepsilon(p) = \{(x,1) \in A | -\varepsilon < x \leq 0\} \cup \{(x,0) \in B | 0 < x < \varepsilon\},$$
$$V_\varepsilon(q) = \{(x,-1) \in C | -\varepsilon < x \leq 0\} \cup \{(x,0) \in B | 0 < x < \varepsilon\}$$

と定め，X の他の点の ε -近傍は平面の距離を利用して定める．このとき X は局所ユークリッド的であるが，2 点 p, q を分離する近傍の組をもちえない．

写像 $f: X \to Y$ によって，部分集合 $A \subset X$ が Y の部分集合 B のなかに移されるとき，$f: (X, A) \to (Y, B)$ と表す．$f(A) = B$ であるような同相写像

$f:(X,A)\to(Y,B)$ が存在するとき，$(X,A)\approx(Y,B)$ と表す．

R^n をユークリッド空間，O をその原点とする．また，H^n を半空間とする．

【定義 1.2】 ハウスドルフ空間 M の任意の点 x に対し，x の近傍 $U(x)$ として

$$(U(x),x)\approx(R^n,O), \text{または} (U(x),x)\approx(H^n,O)$$

となるものがとれるならば，M を n **次元位相多様体**（n-dimensional topological manifold）という．この節では，位相多様体のことを単に**多様体**とよぶことにする．多様体 M に対して

$$\partial M=\{x\in M|(U(x),x)\approx(H^n,O)\}$$

を M の**境界**（boundary）という．また，その補集合

$$\mathrm{Int}\,M=M-\partial M$$

を M の**内部**（interior）という．$M\neq\emptyset$ であれば，∂M 自身は境界をもたない $(n-1)$-多様体になっている．

■ **例 1.6** ■ 曲面は2次元多様体である．いくつかの円周からなる縁がその曲面の境界である．ユークリッド空間 R^n，半空間 H^n，球体 B^n, 球面 S^n はいずれも n 次元多様体である．B^n,H^n はそれぞれ境界 $\partial B^n=S^{n-1},\partial H^n=R^{n-1}$ をもつ多様体であり，R^n,S^n は境界をもたない多様体である．

位相空間 X の開集合族 $\{U\}$ の部分族 $\{V_\lambda|\,V_\lambda\in\{U\},\lambda\in\Lambda\}$ で，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda=X$ となるものを X の**開被覆**（open covering）という．X の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}$ に対し，そのなかの有限個の開集合を選んでふたたび X の開被覆をつくることができるとき，X は**コンパクト**（compact）であるという．コンパクト性についての重要な性質をいくつか挙げておこう．

(1) コンパクトな位相空間の閉集合はコンパクトである．

(2) コンパクト集合の連続像はコンパクトである．

(3) ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合である.

(4) ユークリッド空間では「有界閉集合」と「コンパクト」とは同値な概念である.

■ **例 1.7** ■ ユークリッド空間 R^n, 半空間 H^n はコンパクトでない. 球体 B^n, 球面 S^n はいずれもコンパクトである. 前節で扱った曲面はすべてコンパクトなものばかりであった.

位相空間 X が 2 つの開集合 U, V の和で $X = U \cup V$ と表せるならば, つねに $U \cup V \neq \emptyset$ となるとき, X は**連結** (connected) であるという.

位相空間 X の任意の 2 点 x, y に対し, 閉区間 $I = [0,1] = \{0 \leq t \leq 1\}$ から X への連続写像 $f: I \to X$ で $f(0) = x, f(1) = y$ となるものが存在するとき X は**弧状連結** (arcwise connected) であるという.

問題 1.3 (1) 連結な位相空間の連続像は連結であることを示せ. (2) 閉区間 $I = [0,1]$ は連結である. このことを示せ. また, この事実を利用して, 弧状連結な位相空間は連結であることを示せ.

境界のない連結な多様体は, コンパクトならば**閉多様体** (closed manifold), コンパクトでなければ**開多様体** (open manifold) とよばれることが多い. 位相空間の用語である "閉集合", "開集合" と混同しないよう注意しておく.

■ **例 1.8** ■ R^n は開多様体, S^n は閉多様体である. 閉区間 $I = [0,1]$ は 0 次元球面 $S^0 = \{0,1\}$ を境界にもつコンパクトな 1 次元連結多様体である. 1 次元閉多様体は円周 S^1 のみである.

■ **例 1.9** ■ 2 次元閉多様体すなわち閉曲面の全体は, 球面, 射影平面および, それらにいくつかのハンドルをつけて得られるものからなる. 境界をもつ任意のコンパクトな曲面はこれらの閉曲面から小さな "開" ディスクをいくつか取り去って構成することができる. この事実は "**曲面のトポロジーの基本定理**" という名前でよく知られている. この定理はデーン (Dehn) とヘガード (Heegard) によって得られたとされているが, マッセイ (Massey) [17, p.53] によると, 最初に証明したの

はブラハナ (Brahana) [11] だということである．

1.2.3　簡単な3次元コンパクト多様体の例

3次元多様体はコンパクトなものに限定しても，曲面の場合とは比較にならないほど複雑で，その全貌はいまだに謎である．次章以降，種々の3次元コンパクト多様体を，その作り方なども併せながら紹介するが，ここでは理解しやすい多様体のいくつかを，名称披露を兼ねて列挙する．3次元多様体のイメージづくりに役立つと思う．

まず，直積によって構成できるものを紹介する．F を閉曲面，S^1 を円周，I を閉区間 [0,1] とする．そのとき $F \times S^1$ は3次元閉多様体である．また $F \times I$ は境界 $F \times \{0\} \cup F \times \{1\}$ をもつコンパクトな3次元多様体である．

$F = D^2$（= ディスク）とするとき，$D^2 \times S^1$ を，中身の詰まったトーラスという意味あいで，**ソリッドトーラス**（solid torus）という．その境界 $\partial(D^2 \times S^1)$ はトーラス $S^1 \times S^1$ である．

$F = S^2$ (= 球面) とするときの $S^2 \times S^1$ は重要な閉多様体だが，不思議なことに固有の名前をもっていないようで，エスツークロスエスワンなどと間抜けなよばれ方をしている．円周率 π が「ナンバーパイ」とよばれている感覚である．

$F = T^2$ $(= S^1 \times S^1$: トーラス) とするときに得られる閉多様体 $T^2 \times S^1 = S^1 \times S^1 \times S^1$ を**3次元トーラス**ということがある．

ソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ をつくるには，円柱 $D^2 \times I$ をグイッと曲げて上底 $D^2 \times \{1\}$ と下底 $D^2 \times \{0\}$ をすなおに貼り合わせればよかった．もう少し正確にいえば，D^2 を R^2 内の単位ディスクとみなして，$(x, y, 0) \in D^2 \times \{0\}$ を $(x, y, 1) \in D^2 \times \{1\}$ と同一視するのである．

ところで，$(x, y, 0) \sim (x, -y, 1)$ とする同一視によっても円柱から新しい閉多様体が得られるが，これは $D^2 \times S^1$ のようで，じつは $D^2 \times S^1$ ではない．われわれはこの多様体を $D^2 \times_\tau S^1$ と表す．その境界がクラインの壷であることから，**ソリッドクラインボトル**（solid Klein bottle）とよばれている．

単位ディスクから周上の対心点を縫い合わせて射影平面をつくったときと同様にして，3次元単位球 B^3 から境界である単位球面 S^2 上の各点 (x, y, z) とその対

心点 $(-x,-y,-z)$ を同一視して多様体をつくることができる．この多様体を**射影空間**（projective 3-space）とよび，P^3 と表す．

これまでに見てきたように，ディスクや球から適当な同一視によって射影平面や射影空間をつくったり，R^3 に1点 $\{\infty\}$ を加えて S^3 をつくったりと，トポロジーでは新しい空間を自由に構成することが多いが，同一視したあとの位相の導入方法はつぎのようにして行われるのが普通である．

同値関係 $\sim$ に関する集合 X の元の同値類の全体を $X/\sim$ で表す．位相空間 $(X,\{U\})$ の点 x にその同値類 $\{y|\ y\sim x\}$ を対応させる写像を $p:X\to X/\sim$ とする．そのとき

$$\{V\}=\{V|V\subset X/\sim,\ p^{-1}(V)\in\{U\}\}$$

は $X/\sim$ の開集合系になる．$\{V\}$ が定める $X/\sim$ の位相を**商位相**（quotient topology）といい $(X/\sim,\{V\})$ を**商空間**（quotient space）という．商位相，商空間のことをそれぞれ，**等化位相**（identification topology），**等化空間**（identification space）ということもある．

1.3 ホモトピー

1.3.1 ホモトピー

位相空間 X から Y への2つの連続写像 f と g に対して，連続写像 $H:X\times I\to Y$ で，各点 $x\in X$ について $H(x,0)=f(x),H(x,1)=g(x)$ となるものが存在するとき，f と g は**ホモトピック**（homotopic）であるといい，$f\simeq g$ と表す．連続写像 H を f と g のあいだの**ホモトピー**（homotopy）という．$h_t(x)=H(x,t)$ とおくと，連続写像 $h_t:X\to Y$ が定まるが，そのような連続写像の族 $\{h_t\}_{t\in I}$ を**ホモトピー**とよぶことも多い．

連続写像 f と g を結ぶホモトピーとして，任意の $x\in A\subset X$ について $h_t(x)=f(x)$ であるようなものが存在するとき，

$$f\simeq g(\mathrm{rel}.A)$$

と表す．

2つの位相空間 X,Y に対して，連続写像 $f:X\to Y,g:Y\to X$ で

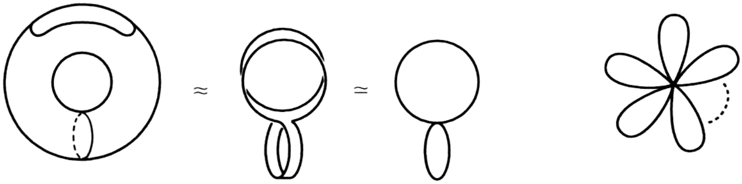
$$g \circ f \simeq 1 : X \to X, \text{かつ } f \circ g \simeq 1 : Y \to Y$$

となるものが存在するならば，X と Y は**ホモトピー同値**（homotopically equivalent）である，または同じ**ホモトピー型**（homotopy type）をもつといい，$X \simeq Y$ と表す．

■ **例 1.10** ■ (1) 1点と同じホモトピー型をもつ位相空間を**可縮空間**（contractible space）という．球やユークリッド空間は可縮空間である．

(2) アニュラス，メビウスの帯はいずれも円周 S^1 とホモトピー同値である．また，ソリッドトーラスも S^1 とホモトピー同値である．

(3) トーラスからディスク D^2 （の内部）を取り除いたものは $S^1 \vee S^1$ とホモトピー同値である．ただし，$S^1 \vee S^1$ は2つの円周を1点でくっつけたものである（図 1.8）．一般に，n 個の円周を1点でくっつけた図形 $B_n = S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1$ を**ブーケ** (bouquet : 花束のこと) とよんでいる．



$S^1 \times S^1 - \mathrm{Int}\, D^2 \simeq S^1 \vee S^1$　　　　$B_n = S^1 \vee \cdots \vee S^1$

図 1.8　穴あきトーラスは8の字図形と同じホモトピー型をもつ

1.3.2　ポアンカレ予想

n 次元球面と同じホモトピー型をもつ n 次元閉多様体のことを n **次元ホモトピー球面** (homotopy n-sphere) という．

2つの多様体が同相であるか否かを判定することはトポロジーの重要な仕事である．そのためには同相な多様体がどんな性質をもつのか調べることが必要になる．とくに球面はもっとも基本的な多様体であるので，多様体が球面になるため

の条件を明らかにすることはとりわけ重要である．

一般に，同相な位相空間が共通にもつ性質や量のことを**位相不変量** (topological invariant) という．ホモロジー群は代表的な位相不変量である．

フランスの偉大な数学者アンリ・ポアンカレ (Henri Poincare, 1854-1912) は，1900 年に「3 次元球面はホモロジー群により特徴づけられる」と発表した．

3 次元球面 S^3 のホモロジー群は

$$H_0(S^3) \cong \mathbf{Z}, H_1(S^3) = 0, H_2(S^3) = 0, H_3(S^3) \cong \mathbf{Z}$$

である．したがって，このときのポアンカレの主張は

「3 次元閉多様体 M^3 が

$$H_0(M^3) \cong \mathbf{Z}, H_1(M^3) = 0, H_2(M^3) = 0, H_3(M^3) \cong \mathbf{Z}$$

というホモロジー群の構造をもっているならば，$M^3 \approx S^3$ である」ということを意味する．

しかしながら，ポアンカレ自身の手でこの命題の反例が示された（1904 年）．そこでポアンカレは，位相空間の新たな不変量として《基本群》を考案し，基本群こそは球面の特徴付けを与えてくれるのではないかと考えて研究を重ねたが，証明できずにこの世を去った．未解決のまま夢は 21 世紀の数学者へ託されることになった．この難問を**ポアンカレの予想**とよんでいる．

ポアンカレの予想　3 次元ホモトピー球面は 3 次元球面である．

この予想は自然に「n 次元ホモトピー球面は n 次元球面である」と一般化できる．ところが《$n \geq 5$ に対する n 次元ポアンカレ予想》は，シェンフリース予想，基本予想，三角形分割問題などとよばれる他の大問題が 1960 年前後にあいついで高次元で解決されるのと呼応して，スターリング (1960 年)，スメール (1961 年) といった人々によって肯定的に解き明かされてしまった．1981 年には 4 次元ポアンカレ予想もフリードマンにより解決された（このあたりの事情については「ポアンカレ予想物語」[6] に詳しい記事がある）．結局，もともとの 3 次元ポアンカレ予想だけが未解決のまま残されたのである．

この重要なテーマをどのように攻略すればよいだろうか．これまでにもさまざまな方法が試みられてきたが，いま一歩及ばなかった．こういった基本的な問題には小細工は通用しない．できるだけ素直に調べていくオーソドックスな方法が必要であろう．本書では，第7章において『ポアンカレ予想解決のための1つのプログラム』を提示する．

1.4　ユークリッド空間のトポロジー

位相空間 X から多様体 M のなかへの同相写像 $f: X \to M$ のことを**埋め込み写像**（embedding）といい，X は M のなかに（像 $f(X)$ として）**埋め込まれている**（embedded）という．この節ではユークリッド空間 R^n に埋め込まれている多様体の諸相について概観しよう．

1.4.1　ジョルダン曲線定理

平面内の図形が円周と同相であるとき，この図形を**ジョルダン曲線**（Jordan curve）または**単純閉曲線**（simple closed curve）とよんでいる．ジョルダンは「曲線とは何か？」と問いかけて，曲線の解析的定義を試みた．そして1893年につぎの定理を提示した．彼の証明は不完全であったが，今日ではいく通りかの証明法が知られており，“**ジョルダン曲線定理**”という名でよばれている．

【定理1.3】　平面上のどんなジョルダン曲線も，その平面を2つの領域に分け，この曲線自身がそれぞれの領域の（共通な）辺境になっている．

ここで，U が位相空間 X の**領域**（domain）であるというのは，$U\ (\neq \emptyset)$ が X の連結な開集合であることを指し，U の**辺境**（frontier）というのは $\overline{U} - U$ のことである．ただし，$\overline{U}$ は X における U の閉包を表す．

数学の定理のなかには，微分学の基礎となる中間値の定理のように，一見するとあまりにもあたりまえのようで，何が問題なのか，とまどってしまうものがある．ジョルダン曲線定理もそのたぐいの命題である．そもそも平面 R^2 内の閉集合 Y が R^2 を3つ以上の領域に分け，しかもその Y がそれらの領域すべてに共通な

辺境になる，などといった状況を想像することは困難である．ところがブラウワー (Brouwer) はそのような例があることを 1909 年に示した．彼の例を修正した“和田の例”を紹介しておこう [1],[3](図 1.9，口絵参照).



図 1.9 陸地はやがて 3 種の水域それぞれの辺境となる．

海の中に浮かぶ円板状の島がある．島の中には 2 つの円形の湖があり，それらは湖水の色からそれぞれ赤水湖，白水湖とよばれている．この島に，海と双方の湖から 3 本の運河を引いて島中をグルグル巡らせ，陸地のどこにいても，塩水，赤水，白水が手軽に汲めるようにしたい．そこで，つぎのような運河掘削を計画した．はじめの 1 時間で，陸地のどの地点からでも塩水，赤水，白水のある場所まで直線距離にしてそれぞれ 1 km 以内で行けるように，運河を巡らせる．このとき，塩水，赤水，白水が混ざってしまわないようにするのはもちろんのこと，各運河が岸を突き破って自分自身と連絡することもしないように，注意して工事をする．つぎの 1/2 時間でこの運河をさらに延長して，陸地の各地点から塩水，赤水，白水がある場所までの最短の直線距離が 1/2 km 以下となるようにする．つぎの 1/4 時間後には，直線距離が 1/4 km 以下となるように運河を延長する．このようにして，$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\left[\dfrac{1}{2}\right]^n$ 時間後には，陸上の各地点から塩水，赤水，白水のある場所までの距離がそれぞれ $\left[\dfrac{1}{2}\right]^n$ km 以下であるようにできる．この工事を続行

すれば，2時間後には陸上の任意の場所からいくらでも近いところに3種類の水があるようになる．ただ，その代償として，島に残された土地は陸地といえるかどうかわからないほど皮ばかりにやせ細ってクネクネとしたものになっているだろう．この島は3種の運河で埋め尽くされている．陸地はこれらの3種の領域（=運河）の辺境になっている.（読者がお望みならば，同様な方法で4種の領域，5種の領域の辺境となる陸地も構成することができる.）

そんなわけで，ジョルダン曲線定理をもっとも一般的な形で示そうとすれば，結構神経を消耗するのである [1],[2]．ここではジョルダン曲線が折れ線である場合について考えてみよう．こんな簡単な場合に制限してみても，トポロジーの考え方が随所に要求される．

まず，“折れ線” とは何かということからはじめよう．$a_0, a_1, \cdots, a_n$ を $a_0 \neq a_1, a_1 \neq a_2, \cdots, a_{n-1} \neq a_n$ であるような平面上の点の列とする．そのとき n 個の線分 $\overline{a_0a_1}, \overline{a_1a_2}, \cdots, \overline{a_{n-1}a_n}$ の和集合を**折れ線**という．点 a_i，線分 $\overline{a_ia_{i+1}}$ をそれぞれこの折れ線の**頂点**，**辺**という．とくに $a_n = a_0$ である折れ線を（耳に馴染まない言い方だが）**閉折れ線**ということにしよう．閉折れ線は簡単な構造をした閉曲線である．たとえば閉折れ線が単純閉曲線になるための必要十分条件は各頂点がちょうど2つの辺の端点となることである．この単純閉折れ線に対してジョルダン曲線定理がなりたつことを示そう．

平面 R^2 内の任意の点 x に対し，この x を始点とする半直線で，位置ベクトル $v = (\cos\theta, \sin\theta), 0 \leq \theta < 2\pi$，と同じ方向をもつものを $H_\theta(x)$ と表す．平面 R^2 内の単純閉折れ線を Σ とし，その補集合 $R^2 - \Sigma$ の任意の点 x について考える．有向半直線 $H_\theta(x)$ と単純閉折れ線 Σ の交わり $H_\theta(x) \cap \Sigma$ は，一般には，いくつかの交点だけからなる．このとき，$H_\theta(x)$ は（ Σ との関係において）『妥当な位置』にある，ということにしよう．そうでない特殊な場合として，半直線 $H_\theta(x)$ が折れ線 Σ の辺を含むことがあるが，そのような半直線はたかだか有限個にすぎない．

さて，妥当な位置にある有向半直線 $H_\theta(x)$ について考える．交点 $H_\theta(x) \cap \Sigma$ のうち，あるものは Σ の辺上の点であり，あるものは Σ の頂点である．これらの交点の総数を $\sharp_\theta(x)$ と表す．ただし，$H_\theta(x)$ が通過する Σ の頂点のうち，この頂点を共有する2つの辺が $H_\theta(x)$ に関して同じ側にある場合には，この頂点は交点 $H_\theta(x)$ として数えないことにする（図 1.9 参照).

ところで，パラメータ θ を変動させると，位置ベクトル $v=(\cos\theta,\sin\theta)$ は原点のまわりで回転し，それに対応して有向半直線 $H_\theta(x)$ は点 x を中心に回転する．いま，θ を α から β まで変動させるとき，交点数 $\sharp_\theta(x)$ がどう変化するか観察してみよう．まず，任意の θ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ に対して半直線 $H_\theta(x)$ が妥当な位置にあるときについて考えると，$\sharp_\theta(x)$ が変化しうるのは回転する半直線 $H_\theta(x)$ が折れ線 Σ の頂点を通過する瞬間だけである．そのパターンを観察すると，通過される頂点 1 個につき，交点数は 2 個増えるか 2 個減るか増減なしであるかの 3 通りしか起こらない．つぎに，回転する半直線 $H_\theta(x)$ が妥当でない位置を通過する場合について観察してみると，この場合にもその前後における交点数の変化は，Σ の 1 つの辺に関して，0 または ± 2 である．したがって，妥当な位置にある半直線 $H_\theta(x)$ に対して，θ がどのように変化しても，交点数 $\sharp_\theta(x)$ の偶奇は変化しない．

したがって，補集合 $R^2-\Sigma$ の点を，Σ に関して "妥当な位置" にある半直線 $H_\theta(x)$ に対する交点数 $\sharp_\theta(x)$ を利用して，

$$A=\{x\in R^2-\Sigma \mid \sharp_\theta(x)\text{ は偶数 }\},$$
$$B=\{x\in R^2-\Sigma \mid \sharp_\theta(x)\text{ は奇数 }\}$$

の 2 つの類に分けることができる．$A\neq\emptyset$ かつ $B\neq\emptyset$ である．

さて，Σ に交わらない線分 $\overline{xy}$ を考える．点 x を始点とする半直線の 1 つを $H_\alpha(x)$ とする．このときの $H_\alpha(x)$ として，話を簡単にするため，Σ のどの辺とも平行でないようなものを採用しておく．いま，Σ に交わらない線分 $\overline{xy}$ を考え，この線分 $\overline{xy}$ に沿って半直線 $H_\alpha(x)$ を点 x から点 y まで平行移動させてみよう．すなわち

$$\{H_\alpha(w) | w=(1-t)x+ty,\ 0\leq t\leq 1\}$$

を考える．そのとき交点数 $\sharp w$ が変化する可能性があるのは半直線 $H_\alpha(w)$ が Σ の頂点を縦断するときだけである．そのパターンを調べると，この場合も頂点を縦断する前と後での変化は 2 個増えるか 2 個減るか増減なしであるかの 3 通りしかない．すなわち $\sharp w$ の偶奇は変化しない．したがって，Σ と交わらない折れ線で結ばれる 2 点はともに A に属するか B に属するかである．このことは，Σ と交わらない折れ線で A の点と B の点を結ぶことはできない，ということを示している．Σ が単純閉折れ線であることから，A,B がともに R^2 内の開集合であることは比

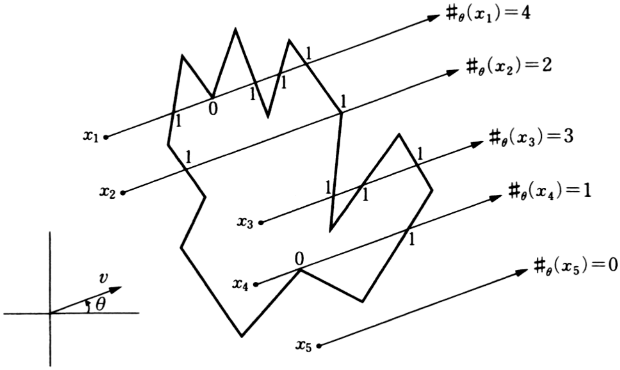


図 1.10　閉折れ線の内部と外部を識別する．

較的容易にわかるだろう．

残された問題は，2点 x, y が両方とも A のなか，あるいは B のなか，にある場合には，Σ と交わらない折れ線で x と y を結べることを示すことである．どちらでも同じことだから，x, y が両方とも A のなかにある場合について考える．線分 $\overline{xy}$ を少しずつ改良して，x と y を結ぶ折れ線として，Σ と交わらないようなものをつくりあげていこう．まず，$\overline{xy}$ が Σ の辺を含んでいる場合，$\overline{xy}$ のそばの折れ線 $\overline{xz} \cup \overline{zy}$ $(z \in R^2 - \Sigma)$ で，$\overline{xz}$ も $\overline{zy}$ も Σ の辺を含まないものをとってくることができるから，$\overline{xy}$ を折れ線 $\overline{xz} \cup \overline{zy}$ に置き換える．つぎに，$\overline{xz} \cup \overline{zy}$ が Σ の頂点を含んでいれば，この折れ線を Σ の頂点（および辺）を含まない折れ線に置き換えることができる．

いま W を，x と y を結ぶ折れ線で，Σ の頂点および辺を含まないものとする．折れ線 W が Σ と交わらなければ，W 自身が求めるべき折れ線になっている．そこで，W が Σ と交わるとしよう．それらの交点のうち，端点 x にもっとも近いものを p，端点 y にもっとも近いものを q とする．さて，端点 x を出発して線分 $\overline{xp}$ 上を進み，交点 p のちょっと手前までいく．そこで，単純閉折れ線 Σ の辺に並行しながら，Σ に触らないように注意して，Σ のすぐ近くに折れ線をつくっていく．この折れ線はいずれは q の近くの点 z で線分 $\overline{xy}$ とぶつかる．点 z は Σ と交

わらない折れ線で x と結ばれているから，x, y と同じく，集合 A の元である．したがって，z は，点 q に関して，y の側にある．すなわち，線分 $\overline{zq}$ は Σ と交わらない．このようにして，Σ と交わらないように x と y を結ぶ折れ線をつくることができる．

よって，A, B はいずれも R^2 内の連結な開集合，すなわち領域であることがわかり，単純閉折れ線についてはジョルダン曲線定理が成り立つことを示すことができた．

1.4.2　シェンフリースの定理

単純閉折れ線 Σ に対するジョルダン曲線定理により，$R^2 - \Sigma$ は 2 つの領域に分かれることがわかった．それらは定理の証明中の A, B である．幾何的には，外に広がっているのが A，有界な方が B である．そこで，A を Σ の**外部**，B を Σ の**内部**とよぶことにしよう．そして，Σ の内部 B の閉包を**多角形** (polygon) とよぼう．そのときつぎの定理が成り立つ．

【定理 1.4】　平面 R^2 内の多角形は単位ディスクとアイソトピックである．

この定理は（2 次元の）**シェンフリース** (Schoenflies) **の定理**とよばれている．このような当たり前の（と思われる）命題であっても，きちんと示そうとすれば，いろいろな知識の整理が必要となる．ここでは，ひとつの証明法の概要を述べるにとどめておこう．詳しくは，たとえばモイズ (Moise)[18] を見られたい．

対角線を 1 本入れることにより，四角形は 2 つの三角形に分けられる．五角形だと，2 本の対角線で 3 つの三角形に分割できるだろう．四角形や五角形をもっと細かく切り刻んで，多くの小さな三角形の集まりとして表すこともできる．一般の（凸とは限らない）多角形 P についても，このような三角形分割 $T(P)$ が可能であろう．いまはこのことを認めることにして，三角形分割 $T(P)$ 内の三角形の個数 $\sharp T(P)$ に関する数学的帰納法を用いる．

$n = 1$ のときは P 自身が三角形であるから定理は正しい（例 1.1）．

さて，$\sharp T(P) \leq n$ なる三角形分割 $T(P)$ をもつ多角形 P はすべて単位ディスク

とアイソトピックであると仮定する．多角形 Q が $\sharp T(Q)=n+1$ なる三角形分割 $T(Q)$ をもつとする．このとき，Q の境界である単純閉折れ線も分割 $T(Q)$ に合わせて自動的に分割されている．それを Σ としよう．境界 Σ の1つの辺 AB を1辺とする $T(Q)$ 内の三角形 ABC について考える．このとき，勝手な三角形 ABC を考えると，$T(Q)-\triangle ABC$ は必ずしも多角形ではない（どんな状況を想定しているか考えてみよ）．しかし，$T(Q)-\triangle ABC$ が構成する図形 R がふたたび多角形になるような三角形 ABC は存在する（このことは当たり前のように思われるが，証明しようとすると存外に難しい）．多角形 R は，帰納法の仮定により，単位ディスクとアイソトピックである．

点 C が境界 Σ の頂点であるときは，AC, BC のいずれか一方，たとえば BC だけが R の境界上にあるから，辺 BC の部分で多角形 R に $\triangle ABC$ を貼り付ければ多角形 Q が得られる．また，点 C が境界 Σ の頂点でないときは，C は多角形 Q の内部にあるから，R に $AB\cup BC$ の部分で $\triangle ABC$ を貼り付ければ Q が得られる．このとき，多角形 R を多角形 $Q=R+\triangle ABC$ に重ねるアイソトピーが存在することがわかる（証明は省略する）．

ジョルダンの曲線定理やシェンフリースの定理は埋め込み写像 $f: S^1\to R^2$ に関する定理である．上のシェンフリースの定理を n 次元に一般化すると，つぎのようになるだろう．ちなみに，上で考えてきたのは埋め込まれた S^1 が折れ線の場合についてだけであった．

【シェンフリース予想】　n 次元空間 R^n に埋め込まれた $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} に対し，R^n-S^{n-1} の有界な連結成分の閉包は n 次元単位球とアイソトピックである．

n 次元球面 S^n に埋め込まれた $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} について考える．勝手な点 $x\in S^n-S^{n-1}$ に対して $S^n-\{x\}\approx R^n$ である．$n=2$ のときにはジョルダンの定理により，S^2-S^1 は2つの領域に分かれる．一般の $n\,(\geq 1)$ についても，S^n-S^{n-1} が2つの領域に分かれることが知られている．それらを B_1, B_2 としよう．n 次元のシェンフリース予想が正しければ，『B_1, B_2 はともに n 次元球である』ことになる．

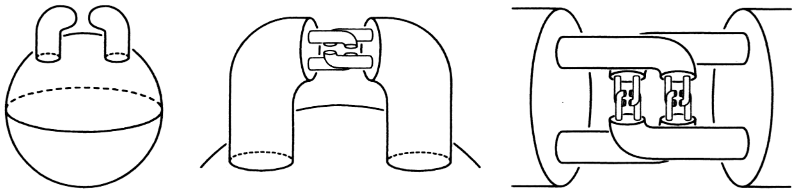


図 1.11 アレクサンダーの角球における角の生え方

1920年頃，アントワーヌ (Antoine) [8],[9] やアレクサンダー (Alexander) [7] は，R^3 への埋め込み問題について研究し，3次元ではシェンフリース予想が成立しないことを示した．ここではアレクサンダーの“角(つの)の生えた球面”なる例を紹介しておこう．

まず，S^3 内の単位球面 S^2 を考える．実際には S^3 の代わりに3次元ユークリッド空間 R^3 のなかで考えればよい．$R^3 = S^3 - \{\infty\}$ 内の単位球面 S^2 から1対の角 A_0, A_1 を生やした図形を S_1 とする（図 1.11 (a)）．つぎに，A_0 の先の1対の角 A_{00}, A_{01} と A_1 の先の1対の角 A_{10}, A_{11} を，図 1.11 (b) のように，角どうしが見かけ上絡まるように生やす．実際には絡んでいない．その図形を S_2 とする．以下，この操作を繰り返し実行して，$S_3, S_4, \cdots$ をつくっていく．すなわち，角 $A_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ ができたら，その先に1対の小さな角 $A_{i_1 i_2 \cdots i_k 0}, A_{i_1 i_2 \cdots i_k 1}$ を生やし，角どうしが見かけ上絡まるようにする．有限回の構成段階でできあがった図形 S_n はまだ元の球面と同相であって，$S^3 - S_n$ の2つの領域の閉包はいずれも3-球である．この操作を無限に続けた結果として得られた図形 S_∞ に対しても，球面 S^2 からの同相写像がつくれるので，2次元球面である．また，S_∞ の内部（=有界なほうの領域）の閉包 X は3次元球である．ところが，S_∞ の外部にある領域の閉包 Y はもはや3次元球ではない．このことは，角 A_0 に引っかけた輪がはずせないことから直観できるが，この直観をもとに，Y の基本群を計算して代数的に確認することができる．すなわち，Y が球ならばその基本群は単位群になるはずだが，真実は $\pi_1(Y) \neq 1$ となる．

このように，一般の同相写像で議論しようとすれば，さまざまな困難が待ちかまえていることを念頭においていなければならない．それはわれわれの日常的な感覚とは馴染まない風景である．われわれが肌で感じている空間には，そういった奇妙な現象をひき起こすことのないような，何らかの構造が期待されてよい．そのような構造の代表的なものが組合せ構造であり，微分構造である．

これから先は主として，組合せ構造をもつ空間だけを研究対象とする．たとえばわれわれの扱う平面図形としては，平面を（無数の）三角形（およびそれに伴う線分，点）に分割しておいて，これらの三角形，線分，点のうちの有限個だけで構成されている図形のみを取り扱う．3次元空間 R^3 内の図形についても同様である．このカテゴリーで考えるかぎり，3次元のシェンフリース予想は正しいことを付け加えておく [4],[12],[18].

1.4.3　コンパクトでない可縮多様体

ホモトピーを物差しとするとき，1点と同じホモトピー型をもつ空間，すなわち可縮空間がもっとも単純な空間であると考えてよいだろう．球は可縮空間であるが，球以外で可縮な3次元コンパクト連結多様体が存在するか否かは，今のところ知られていない．ユークリッド空間 R^3 は可縮な開多様体，すなわちコンパクトでない境界なしの連結な可縮多様体であった．ところで，コンパクトでない場合には，R^3 以外にも可縮な開多様体が知られている．その代表的なものを1つ紹介する．コンパクトでない多様体の複雑さを理解していただこう．

まず，R^3 内に素直なソリッドトーラス (円環体) T を用意する．T のなかには細いソリッドトーラス T' を図 1.12 のように埋め込んでおく．

この T' の自分自身の絡まりを T という枠のなかで解消しようとしてもはずせないが，枠 T がなければ R^3 のなかで（T から遠く離れたところの空気はかき混ぜないようにして）T' を素直なソリッドトーラス T の上に重ねることができる．したがって逆に，R^3 上の同相写像 $h: R^3 \to R^3$ で，$h(T) = T'$，かつ R^3 内の適当なコンパクト集合の外では恒等写像，となっているものが存在する．いま，

$$T_1 = T' = h(T), T_2 = h(T_1), \cdots, T_n = h(T_{n-1})$$

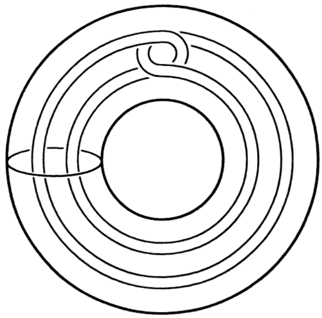


図 1.12 ソリッドトーラスの中に細いソリッドトーラスを埋め込む

と定め，$T_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$ とすれば

$$T \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_{n-1} \supset T_n \supset \cdots \supset T_\infty$$

である．そこで，

$$W = S^3 - T_\infty,\ \text{ただし}\ S^3 = R^3 \cup \{\infty\},$$

とおけば，W は組合せ構造をもった開多様体である．この開多様体は **ホワイトヘッド多様体**（Whitehead manifold）とよばれているもので，

「W は R^3 と同相でないが，$W \times R$ は R^4 と同相である」

という不思議な性質をもっている [13].

組合せ構造をもった可縮 4 次元開多様体が非可算個あることを，実例をつくって示したグレイサー (Glaser) [14] の仕事がある．多様体がどれだけの種類あるだろうかと指折り数えて分類するのは幾何学的トポロジーの楽しみのひとつであるが，対象が非可算個もあるのでは数え上げようもない．3 次元の場合にも事情は同じである．組合せ構造をもつ多様体に限っても，コンパクトでないものまでを対象にした多様体全部を分類することは不可能なので，多様体の分類問題はコンパクトなものに限定するのが自然であろう．

1.5 複　体

この節では，空間の組合せ構造，すなわち複体について説明する．

1.5.1 複　体

ユークリッド空間 R^N においては，異なる2点は1つの直線を決定し，同一直線上にない3点は1つの平面を決定する．

R^N 内の異なる2点 a_0, a_1 を結ぶ線分 $\overline{a_0a_1}$ を $p:q$ に内分する点 x は $x = \dfrac{q}{p+q}a_0 + \dfrac{p}{p+q}a_1$ と表される．$\dfrac{q}{p+q} = t_0, \dfrac{p}{p+q} = t_1$ とおけばこの関係式は

$$x = t_0a_0 + t_1a_1,\ t_0 + t_1 = 1, t_0 > 0, t_1 > 0$$

と書くことができる．2点 a_0, a_1 を結ぶ直線 $L(a_0, a_1)$ 上の任意の点 x を表すには，上の関係式から $t_0 > 0, t_1 > 0$ の条件を除外すればよい．また，同一直線上にない3点 a_0, a_1, a_2 が定める平面 $L(a_0, a_1, a_2)$ 上の点 x は

$$x = t_0a_0 + t_1a_1 + t_2a_2,\ t_0 + t_1 + t_2 = 1, -\infty < t_i < \infty$$

と一意に表される．

一般に，R^N 内の $k+1$ 個の点 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ は，たかだか k 次元の（アフィン空間としての）部分空間

$$\begin{aligned} L &= L(a_0, a_1, \cdots, \ a_k) \\ &= \{x = t_0a_0 + t_1\ a_1 + \cdots + t_ka_k \in R^N \mid t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1, -\infty < t_k < \infty\} \end{aligned}$$

を決定する．このとき，$a_0, a_1, \cdots, a_k$ は L を**張る**（span）という．この部分空間 L の次元がちょうど k であるとき，点 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ は R^N 内で**独立**（independent）であるという．R^N 内の独立な点 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ が張る k 次元部分空間 L 上の点 x は

$$x = t_0a_0 + t_1a_1 + \cdots + t_ka_k,\ t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1$$

の形で1通りに表される．このとき，実数の組 $(t_0, t_1, \cdots, t_k)$ を点 $x \in R^N$ の $(a_0, a_1, \cdots, a_k)$ に関する**重心座標**（barycentric coordinates）という．

A を R^N の部分集合とする．A の任意の2点を結ぶ線分がつねに A に含まれ

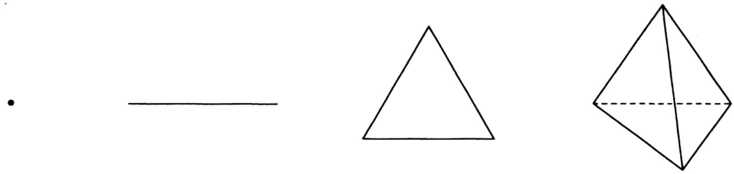


図 1.13 n-単体

ているならば，A を R^N の**凸集合**（convex hull）という．

R^N 内の独立な $k+1$ 個の点 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ を含む最小の凸集合を k-**単体**（k-simplex）といい，$\sigma = a_0 a_1 \cdots a_k$ と表す．このときの k を $\dim \sigma$ と表し，σ の**次元**（dimension）という．また，$a_0, a_1, \cdots, a_k$ を σ の**頂点**（vertex）という．単体 σ の頂点の集合 $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ から勝手に選んだ $i+1$ 個の点 $b_0, b_1, \cdots, b_i$ はふたたび R^N 内で独立になっている．単体 $\tau = b_0 b_1 \cdots b_i$ を単体 σ の**辺単体**（face）といい，$\tau \prec \sigma$ と表す．σ 自身および空集合 $\emptyset$ も σ の辺単体とみなす．$\cup\{\tau | \tau \prec \sigma, \tau \neq \sigma\}$ を σ の**境界**（boundary）といい，$|\partial\sigma|$ と表す．また $\sigma - |\partial\sigma|$ を σ の**内部**（interior）といい，Int σ と表す．

単体 $\sigma = a_0 a_1 \cdots a_k$ 上の点 x を $a_0, a_1, \cdots, a_k$ に関する重心座標で $(t_0, t_1, \cdots, t_k)$ と表すと，それは $t_i \geq 0\,(i = 1, 2, \cdots, k)$ で特徴づけられる．とくに，σ の内部 Int σ の点に対しては $t > 0\,(i = 1, 2, \cdots, k)$ であり，頂点 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ の重心座標はそれぞれ

$$(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots\cdots (0, 0, \cdots, 1)$$

である．$\left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k+1}, \cdots \dfrac{1}{k+1}\right)$ という重心座標をもつ点を単体 σ の重心（barycenter）といい，$\hat{\sigma}$ と表す．単体自身の線形構造を考えるとき，重心座標はたいへん便利である．その理由は，単体 σ が R^N 上のアフィン変換によってどこへ移されようと，σ 内の点の重心座標が変わらないことにある．

【定義 1.5】 R^N 内の有限個の単体の集合 $K = \{\sigma\}$ がつぎの条件:

(i)　$\sigma \in K$ かつ $\tau \prec \sigma$　ならば $\tau \in K$

(ii)　$\sigma_1, \sigma_2 \in K$ ならば $\sigma_1 \cap \sigma_2 \in K$

を満たすならば，K を R^N 内の**単体的複体**（simplicial complex），または単に**複体**という．

***!* 注意 1.1**　この本ではおもに有限個の単体からなる複体を扱うが，可算無限個の単体の集合 K に対して単体的複体の概念を拡張する必要があるときは，さらに**局所有限性**（locally finiteness）とよばれるつぎの条件：

R^N の任意の点 x に対し，x の開近傍として，K のたかだか有限個の単体としか交わらないものがとれること，

を要請するのが普通である．この条件により，たとえば

$$A_n = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1,\, y = \frac{1}{n}\},$$
$$B \;= \{(x,y) | x = 0,\, 0 \leq y \leq 1\}$$

とするときの櫛状図形

$$C = B \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$

は，複体としての考察の対象から排除されている．

K, L を複体とする．そのとき，K の任意の単体 $\sigma = a_0 a_1 \cdots a_k$ を L の単体 $\psi(\sigma) = \psi(a_0)\psi(a_1)\cdots\psi(a_k)$ に移す写像 $\psi : K \to L$ を**単体写像**（simplicial map）という．単体写像 $\psi : K \to L$ が全単射であるとき ψ を**同型写像**（isomorphism）という．このとき K と L は**同型**（isomorphic）であるといい，$K \cong L$ と書く．

問題 1.4　単体写像 $\psi : K \to L$ に対して，

「$\sigma \in K$ かつ $\tau \prec \sigma$ ならば $\psi(\tau) \prec \psi(\sigma)$」

が成り立つことを示せ．

1.5.2 重心細分

R^N 内の複体 $K = \{\sigma | \sigma \subset R^N\}$ に対し，R^N の部分空間 $P = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ を**多面体**（polyhedron）といい，$|K|$ と表す．

K_1, K_2 を $|K_1| = |K_2|$ なる複体とする．任意の単体 $\rho \in K_2$ に対して $\rho \subset \sigma$ となる単体 $\sigma \in K_1$ が存在するならば，K_2 を K_1 の**細分**（subdivision）という．複体の細分をつくる方法はいくつかある．なかでもこれから述べる重心細分はもっとも基本的な細分技術である（図 1.14）．

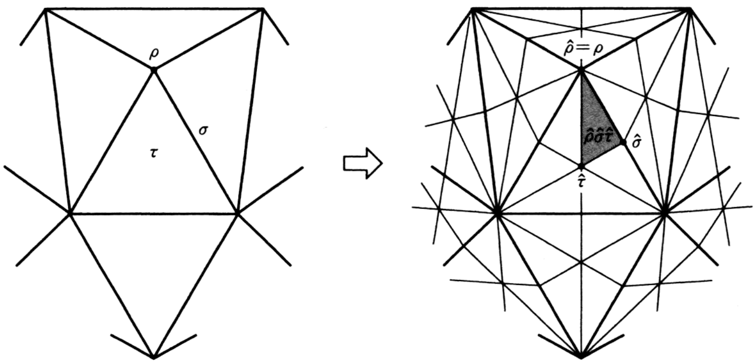


図 1.14 重心細分の方法

K を複体とし，単体 $\sigma \in K$ の重心を $\hat{\sigma}$ とする．そのとき

$$\beta K = \{\hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 \cdots \hat{\sigma}_k | \sigma_k \in K, \sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \cdots \prec \sigma_k\}$$

と定めれば，βK は K のすべての単体の重心を頂点とする複体で，しかも K の細分になっている（ここで K の頂点 v の重心は v 自身であることに注意しておく）．この βK を K の**重心細分**（barycentric subdivision）という．重心細分を繰り返し実行することにより帰納的に得られる K の細分 $\beta^n K = \beta(\beta^{n-1}K)$ のことを n **次重心細分**（ n-th barycentric subdivision）という．

一般に，単体 σ の直径 diam σ は，σ の最長の 1 次元辺単体の長さである．2-単体 $\sigma = a_0a_1a_2$ と，それを 1 回重心細分して得られる各単体 $\tau \subset \sigma$ について考えると，σ の重心は頂点 a_i とその対辺 $\hat{A}_i$ の重心を結ぶ線分を 2：1 に内分する点で

あるから，

$$\operatorname{diam}\tau = \max\left\{\frac{1}{2}d(a_i, a_j),\ \frac{2}{3}d(a_i, \hat{A}_i) \mid i = 0, 1, 2\right\}$$

すなわち

$$\operatorname{diam}\tau < \frac{2}{3}\operatorname{diam}\sigma$$

である．σ が3-単体の場合には，σ の重心は σ の頂点と対面の重心を結ぶ線分を3：1の比に内分する位置にあるから，

$$\operatorname{diam}\tau < \frac{3}{4}\operatorname{diam}\sigma$$

である．一般につぎのことが成り立つ．

m -単体 σ と，それを重心細分して得られるそれぞれの単体 $\tau \subset \sigma$ に対して

$$\operatorname{diam}\ \tau < \frac{m}{m+1}\operatorname{diam}\sigma$$

である．

複体 K の単体の直径の最大値

$$m(k) = \max\{\operatorname{diam}\sigma | \sigma \in K\}$$

を K の**メッシュ**（mesh）という．k 次元複体 K の n 次重心細分 $\beta^n K$ に対しては

$$m(\beta^n K) \leq \left[\frac{m}{m+1}\right]^n m(K)$$

となる．$n \to \infty$ のとき $\left[\frac{m}{m+1}\right]^n \to 0$ だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，十分大きな n をとることにより，重心細分 $\beta^n K$ のメッシュが ε 以下になるようにできる．

1.5.3　スターとリンク

複体 H が複体 K の部分集合であるとき，H を K の**部分複体**（subcomplex）という．複体 K の部分集合 X が K の部分複体であることを確かめたいときは，

「$\sigma \in X, \tau \prec \sigma$ ならば $\tau \in X$」

であることをチェックしておけばよい．

複体 K とその部分複体 H に対し，H の単体 τ を辺単体にもつ K の単体の全体が生成する部分複体

$$\mathrm{St}(H,K)=\{\rho\in K|\tau\in H,\tau<\sigma\in K,\rho<\sigma\}$$

を H の**スター近傍**（stellar neighborhood）という (図 1.15).

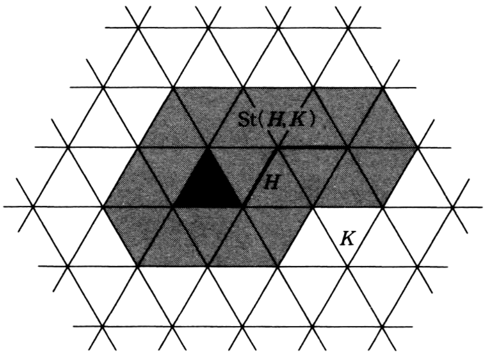


図 1.15　スター近傍 $\mathrm{St}(H,K)$

2つの単体 $\sigma=a_0a_1\cdots a_i$ と $\tau=b_0b_1\cdots b_j$ は，両者の $i+j+2$ 個の頂点からなる集合 $\{a_0,a_1,\cdots,a_i,b_0,b_1,\cdots,b_j\}$ が独立であるとき，**ジョイン可能**（joinable）であるという．このとき，これらの頂点から定まる $(i+j+1)$-単体 $a_0a_1\cdots a_ib_0b_1\cdots b_j$ を σ と τ の**ジョイン**（join）といい，$\sigma*\tau$ と表す．たとえば 3-単体 $\sigma=abcd$ は 0-単体 a と 2-単体 $\tau=bcd$ とのジョイン $a*\tau$ とみなせるし，1-単体 $\alpha=ab$ と 1-単体 $\beta=cd$ とのジョイン $\alpha*\beta$ とみなすこともできる．空集合 $\emptyset$ に対しては

$$\emptyset*\sigma=\sigma*\emptyset=\sigma,\ \emptyset*\emptyset=\emptyset$$

と約束しておくと便利である．

複体 K の任意の単体と複体 L の任意の単体がジョイン可能で，$\{\sigma*\tau|\sigma\in K,\tau\in L\}$ が複体であるとき，この複体を K と L の**ジョイン**といい，$K*L$ と表す．

複体 $K\subset R^N$ の単体 σ と τ がジョイン可能で，さらに $\sigma*\tau\in K$ であるとき，σ と τ は**複体 K の中でジョイン可能**であるという．K の中で $\sigma\in K$ とジョイン可能であるような K の単体の集合は K の部分複体となる．この部分複体を σ の

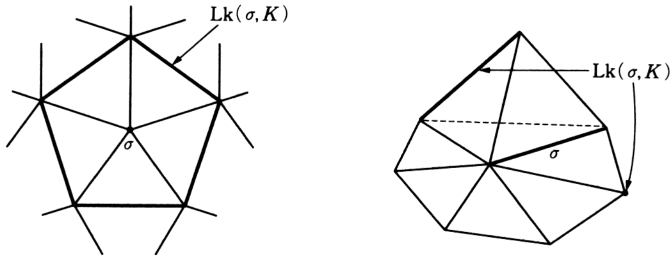


図 1.16　単体 σ のリンク Lk (σ, K)

リンク（link）とよび，$\mathrm{Lk}(\sigma, K)$ と表す．

単体 σ に対してその辺単体の全体 $\kappa(\sigma) = \{\tau \in K | \tau \prec \sigma\}$ は複体をなす．このとき $\partial\sigma = \kappa(\sigma) - \sigma$ は $\kappa(\sigma)$ の部分複体になっている．単体 σ を複体 $\kappa(\sigma)$ とみなしたとき，$\kappa(\sigma)$ と $\mathrm{Lk}(\sigma, K)$ とのジョイン $\kappa(\sigma) * \mathrm{Lk}(\sigma, K)$ を σ の**スター**（star）といい，$\mathrm{St}(\sigma, K)$ と表す．これは単体 $\sigma = \kappa(\sigma)$ のスター近傍 $\mathrm{St}(\kappa(\sigma), K)$ にほかならない．

複体 K の1つの単体 σ とその勝手な内点 a に注目してみる．そのとき，複体 $a * \partial\sigma * \mathrm{Lk}(\sigma, K)$ は複体 $\mathrm{St}\ (\sigma, K) = \sigma * \mathrm{Lk}(\sigma, K)$ の細分になっているが，$\mathrm{Lk}(\sigma, K)$ の部分は細分されず，元のままになっている．したがって，$\mathrm{St}(\sigma, K)$ の部分だけを $a * \partial\sigma * \mathrm{Lk}(\sigma, K)$ と交換することにより，K の細分 $K^*(a)$ が得られる．すなわち

$$K^*(a) = \{K - \mathrm{St}(\sigma, K)\} \cup a * \partial\sigma * \mathrm{Lk}(\sigma, K).$$

このようにして K から細分 $K^*(a)$ をつくる操作を，点 a における σ の**スターリング** (starring) という．

スターリング $K_{i-1} \to K_i,\ i = 1, 2, \ldots, r$ ，によって得られる有限列：

$$K = K_0, K_1, K_2 \cdots\cdots, K_r = L$$

があるとき，複体 L を K の**スター細分** (stellar subdivision) という．

1.5.4 凸胞複体の細分

平面 R^2 内の凸多角形は，いくつかの 1 次不等式の解集合として表すことができる．三角形を 3 つの 1 次不等式 $g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, g_3 \geq 0$ で表すとき，2 つの 1 次方程式 $g_1 = 0, g_2 = 0$ の解はこの三角形の 1 つの頂点であり，$g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, g_3 = 0$ の解集合はこの頂点の対辺になっている．

一般に，R^n におけるいくつかの 1 次方程式 $f_1 = 0, f_2 = 0, \cdots, f_i = 0$ といくつかの 1 次不等式 $g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, \cdots, g_j \geq 0$ を同時に満たす点の集合は凸集合になる．この解集合 $A(\neq \emptyset)$ がコンパクトであるとき，A を**凸胞体**（convex cell）という．凸胞体 A を定める式のうち，いくつかの 1 次不等式 $g_k \geq 0$ を 1 次方程式 $g_k = 0$ に置き換えて得られる凸胞体 B を，A の**辺**（face）といい，（単体とその辺単体の関係を表す記号を流用して）$B \prec A$ と書く．ただし，$\emptyset \prec A, A \prec A$ と約束する．とくに，1 点からなる辺を**頂点**という．

R_N の凸胞体の集合 $\overline{K} = \{A\}$ がつぎの条件：

(i) $A \in \overline{K}$ かつ $B \prec A$ ならば $B \in \overline{K}$

(ii) $A_1, A_2 \in \overline{K}$ ならば $A_1 \cap A_2 \in \overline{K}$

を満たすならば，$\overline{K}$ を**凸胞複体**（convex linear cell complex）という．

単体的複体はもちろん凸胞複体である．一方，任意の凸胞複体は（その頂点を増やすことなく）細分することによって，単体的複体に直すことができる．その方法を述べておこう．

まず，凸胞複体 $\overline{K}$ のすべての頂点に番号を付けておく．凸胞体 $A \in \overline{K}$ の頂点のうちで，番号が一番若いものを a とする．また A の辺のうち，頂点 a を含まないものの全体をすべて集め，それらの和集合を C とする．このときの A を，a と C とのジョインの形で $A = a * C$ と書いておくと便利である．$\overline{K}$ のすべての凸胞体を，このようなジョインの構造で表しておく．

さて，これらの凸胞体を次元の低いものから順に細分する．$A = a * C$ に対する帰納法の仮定として，$\dim C < \dim A$ だから C はすでに細分されて単体的複体 $\kappa(C)$ になっているものとしよう．このとき，a と複体 $\kappa(C)$ とのジョイン $a * \kappa(C)$ は A の細分で，しかも単体的複体になっている．さらに，$a * \kappa\ (C)$ の頂点の全体は，ちょうど A の頂点だけからなる．この細分は他の凸胞体になんら影響を与え

ていないので，この方法で（頂点を増やすことなく）$\overline{K}$ 全体を細分して単体的複体に直すことができる．

1.6　PL 多様体と正則近傍

この節では組合せ構造をもった多様体 (=PL 多様体)，および正則近傍について解説する．(位相）多様体の局所ユークリッド的性質を組合せ構造の言葉で述べたものがPL 多様体である．PL 多様体は単純明快な構造をしているので，記述に便利な道具も多く開発されていて，位相多様体に比べてたいへん扱いやすくなっている．そのような道具の代表として，ホワイトヘッド (J.H.C. Whitehead)[19] が発明した正則近傍の概念がある．正則近傍は PL トポロジーで本質的な役割を演じる．残念ながら紙数の関係で，細部にわたる理論を紹介することができない．この理論の詳しい内容について本格的に学びたい人にはジーマン (Zeeman)[20]，ハドソン (Hudson)[16]，グレイサー (Glaser)[15] などの書物が参考になるだろう．

1.6.1　多面体と PL 写像

複体 $K \subset R^N$ に対し，R^N の部分空間 $P = \bigcup_{\sigma \in K} K$ を**多面体**といい，$|K|$ と表した．位相空間 X がある多面体 $P = |K|$ と同相であるとき，X を**位相多面体**（topological polyhedron）という．このときの複体 K を X の**三角形分割**（triangulation）または**単体分割**という．どのような位相空間が三角形分割可能であるか，などといったトポロジーの基本的な問題がさまざまあるが，これらのテーマについては第3章で詳述する．ここでは多面体そのものについて考えよう．

$\psi : K \to L$ を複体 K から複体 L への単体写像とする．そのとき，K の単体 $\sigma = a_0 a_1 \cdots a_k$ 内の各点 x に対し，$(a_0, a_1, \cdots, a_k)$ に関する x の重心座標 $(t_0, t_1, \cdots, t_k)$ を用いて

$$f_\sigma(x) = t_0\psi(a_0) + t_1\psi(a_1) + \cdots + t_k\psi(a_k)$$

と定めれば，写像 $f_\sigma : \sigma \to \psi(\sigma)$ は単体 σ 上で線形になっている．この写像を利用すると，多面体 $|K|$ から多面体 $|L|$ への連続写像が自然に得られる．その写像を $|\psi| : |K| \to |L|$ と表す．

$f: P \to Q$ を多面体 $P = |K|$ から多面体 $Q = |L|$ への連続写像とする．K, L の（重心細分とは限らない）細分 K', L' を適当にとって，単体写像 $\psi: K \to L$ で $f = |\psi|$ となるものがつくれるならば，f を **PL 写像**（piecewise linear map）という．とくに，f を同型写像 ψ で実現できるときは f を **PL 同相写像**（PL homeomorphism）という．

1.6.2　PL 多様体

n -単体 σ と PL 同相な多面体を **PL n-球**といい，σ の境界 $\partial\sigma$ と PL 同相な多面体を **PL $(n-1)$-球面**という．

多面体 $M = |K|$ について考える．任意の単体 $\sigma \in K$ に対して $|\mathrm{St}(\sigma, K)|$ が PL n -球であるとき，M を n 次元 **PL 多様体**という．このときの複体 K を**組合せ多様体**（combinatorial manifold）という．

これらの用語が表す概念の実体は，本質的には同じものであるが，位相空間として扱いたいときは "PL 多様体"，組合せ構造に着目するときは "組合せ多様体" と使い分けることができるので便利である．

じつは，多面体 $M = |K|$ が PL 多様体であることを知るためには，K の各頂点 v に対して $|\mathrm{St}(v, K)|$ が PL n -球であることを確認しさえすればよい．またこのとき，任意の k -単体 $\sigma \in K$ に対して，$|\mathrm{Lk}(\sigma, K)|$ は $(n-k-1)$-球面または $(n-k-1)$-球になっている．そこで

$$\begin{aligned} \partial M &= \cup\{\sigma \in K \mid |\mathrm{Lk}(\sigma, K)| \text{ は } (n-k-1) \text{ 球}\}, \\ \mathrm{Int}\, M &= M - \partial M \end{aligned}$$

と定めると，この $\partial M, \mathrm{Int} M$ が（位相多様体としての）M の境界および内部になっている．

部分多様体など多様体に関連する各種の概念は複体の理論と整合性を保つように定義される．多様体の重要な概念である向き付け可能性についてはホモロジーの言葉で学んだ読者も多いと思われるが，これらも組合せ幾何的に定義することができる．しかし，ここでは割愛する．

R^N や多様体のなかに埋め込まれている図形を，同相の性質を変えずに連続的に変形する操作をアイソトピーといった．これからは PL 写像によるアイソトピー

を考えよう．

多面体 P から PL 多様体 M の中への PL 同相写像 $f: P \to M$ を **PL 埋め込み写像**（PL embedding）という．

$f, g: P \to M$ をアイソトピックな PL 埋め込み写像とし，連続写像の族 $\{h_t\} = \{h_t : P \to M \mid t \in I\}$ を $f = h_0$ と $g = h_1$ を結ぶアイソトピーとする．このとき，$H(p,t) = (h_t(p), t)$ によって定義された写像 $H: P \times I \to M \times I$ が PL 写像であるならば，$\{h_t\}$ を **PL アイソトピー**という．以下，アイソトピーといえば，断らない限り PL アイソトピーのこととする．

X を P の部分多面体，$f, g: P \to M$ を X 上では $f = g$ であるような PL 埋め込み写像とする．このとき，f, g を結ぶアイソトピー $\{h_t\}$ で，X 上では $h_t = f, 0 \leq t \leq 1$，となるものが存在するならば，f と g は X **を動かさないでアイソトピック**（isotopic keeping X fixed）であるという．

$f, g: P \to M$ を PL 多様体 M への PL 埋め込み写像，Y を M の部分多面体とする．アイソトピー $\{h_t\} = \{h_t : M \to M | t \in I\}$ で

(i) 各 $t \in I$ に対して h_t は PL 写像，

(ii) $h_0 = 1$,

(iii) $h_1 \circ f = g$,

(iv) Y 上では $h_t (t \in I)$ は恒等写像，

となるものが存在するとき，$\{h_t\}$ を**アンビアントアイソトピー**（ambient isotopy）といい，f と g は Y **を動かさないでアンビアントアイソトピック**（ambient isotopic keeping Y fixed）であるという．

1.6.3　正則近傍

複体 K の単体 σ が他の単体の辺単体とならないならば，σ は K の**主単体**（principal simplex）であるという．このとき $K - \{\sigma\}$ は K の部分複体になる．複体 K とその主単体 σ の関係が，σ の頂点 v, σ の辺単体 τ および K の部分複体 K_1 を用いて

$$K = \sigma \cup K_1, \quad \sigma = v * \tau,\ \sigma \cap K_1 = v * \partial\tau$$

と記述できるとき，$K = \sigma + K_1$ と書くことにしよう．そして K を K_1 に置き換える操作を $K \searrow K_1$ と表そう（図 1.17）．

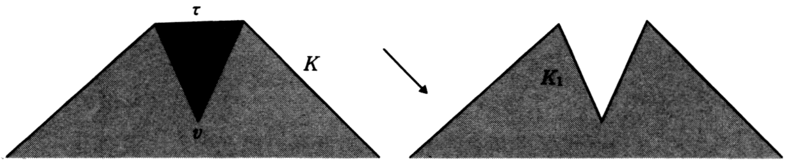


図 1.17 初等カラップシング $K \searrow K_1$

複体 K とその部分複体 L に対して有限列：

$$K = K_0 \searrow K_1 \searrow \cdots\cdots \searrow K_n = L$$

があるとき，K は L に**カラップス**（collapse）するといい，$K \searrow L$ と表す．このとき，K を L に置き換える操作を**カラップシング**（collapsing）という．

複体 K の部分複体 L に対し，「L'' のスター近傍 St (L'', K'') は L'' にカラップスする」という好都合な性質がある．ただし，L'', K'' はそれぞれ L, K の第 2 次重心細分 $\beta^2 K, \beta^2 L$ である．この性質を抽象することによって得られたものが正則近傍の概念である．

多面体 P とその部分多面体 Q に対して，P, Q の単体分割 K, L として $K \searrow L$ となるものがとれるとき，P は Q に**カラップス**するといい，$P \searrow Q$ と表す．とくに P が 1 点にカラップスできるとき，P は**カラップシブル**（collapsible）であるといい，$P \searrow 0$ と表す．

問題 1.5 n-単体はカラップシブルである．2-単体，3-単体について，カラップシングの様子を具体的に図示し，このことを確認せよ．

2 つの多面体 P_1, P_2 に対し，カラップシングとその逆の操作を有限回繰り返して，P_1 から P_2 に行き着くことができるならば，P_1 と P_2 は同じ**単純ホモトピー型**（simple homotopy type ）をもつという．

$P \searrow Q$ ならば P 上のホモトピー $\{f_t : 0 \leq t \leq 1\}$ で

(i) $f_0 = 1$,

(ii) $f_0|Q = 1,\ 0 \leq t \leq 1$,

(iii) $f_0(P) = Q$

を満たすものが存在することから，同じ単純ホモトピー型をもつ2つの多面体は同じホモトピー型をもつ．すなわち“カラップシング”は，連続写像の世界における“ホモトピー”という抽象的概念を組合せ的世界の概念として具体化・単純化したものである．

問題1.6　$K = \sigma + K_1$,σ を2-単体とするとき，

$$f_0 = 1,\ f_t|K_1 = 1\ (0 \leq t \leq 1),\ f_1(|K|) = |K_1|,$$

を満たすホモトピー $\{f_t : |K| \to |K_1| \mid 0 \leq t \leq 1\}$ のつくり方を考えよ．

【定義1.6】　M を n 次元PL多様体，Q を M 内の多面体とする．そのとき

(i)　$Q \subset \mathrm{Int}\, N \subset N \subset \mathrm{Int}\, M$

(ii)　N は n 次元PL多様体

(iii)　$N \searrow Q$

となる N を，M における Q の**正則近傍**（regular neighborhood）という．

【正則近傍の存在性 (図1.18)**】**

PL多様体 $M = |K|$ 内の多面体 $Q = |L| \subset (\mathrm{Int}\, M)$ に対して，L の2次重心細分 L'' のスター近傍は L'' にカラップスするから多面体 $|\mathrm{St}(L'', K'')|$ は P の正則近傍になっている．$|\mathrm{St}(L'', K'')|$ のことを $|K|$ における $|L|$ の**第2次導近傍**（2nd derived neighborhood）という．

【正則近傍の一意性】

N_1, N_2 を Q の2つの正則近傍とする．このとき，M 上の Q を動かさないアンビアントアイソトピーで N_1 を N_2 に移すものがある．アンビアントアイソトピーの範囲ではなにも変化していないとみなすのがトポロジーの考え方であるか

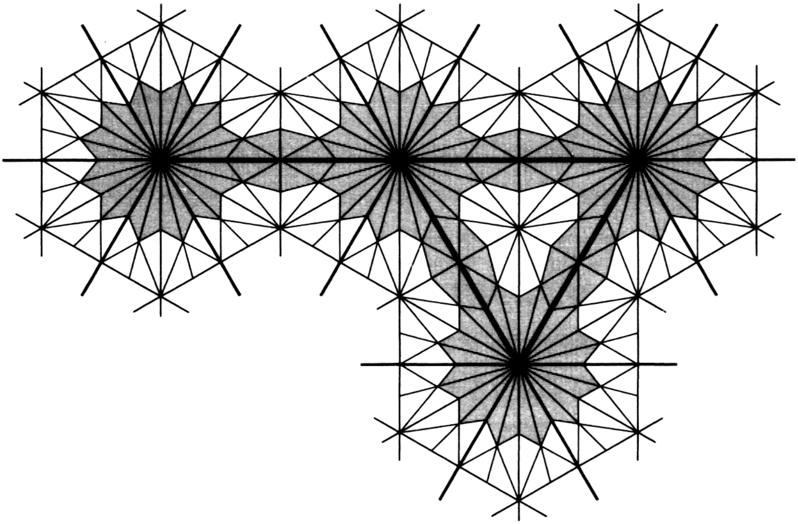


図 1.18 第 2 次導近傍

ら，$Q(\subset \operatorname{Int} M)$ の正則近傍は一意に定まるといってよい．その意味で，M における Q の正則近傍を $N(Q,M)$ と書くことが多い．

$M=|K|$ の頂点 v に対してその第 2 次導近傍 $|\mathrm{St}(v,K'')|$ は n-球である．M の点 x が頂点でないときは x を頂点にもつように K を細分することができるから，M の任意の 1 点の正則近傍は n -球であることがわかる．一般に，Q がカラップシブルであるとき，$N(Q,M) \searrow Q \searrow 0$ であるから，$N(Q,M)$ は 1 点の正則近傍でもある．したがってカラップシブルな多面体の正則近傍はつねに n-球である．

1.2 節で，曲面から 2 つのディスク（の内部）を取り去り，その縁に沿って曲面にハンドルをつけて新しい曲面をつくる方法を紹介した．そのとき曲面からディスクの内部を取り除くのに，どの部分をどのくらいの大きさで切除すればよいのか迷うところではある．このことについて検証してみよう．

曲面の内部にあるディスクはディスク内部の任意の 1 点の正則近傍になっていることに注意する．連結な曲面 F 上にある 2 つのディスク D_1, D_2 を考えてみよう．D_1 と D_2 は交わっていても離れていてもかまわないが，$\partial D_i \cap \partial F = \emptyset\,(i=1,2)$

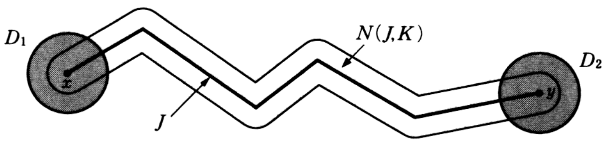


図 1.19　正則近傍の一意性はハンドル接着の定義を可能にする．

とする．いま，2点 $x \in \mathrm{Int}\, D_1, y \in \mathrm{Int}\, D_2$ を選び，x と y を折れ線 Σ で結ぶ．Σ は x にも y にもカラップスするから，折れ線 Σ の正則近傍 $N(\Sigma, K)$ は x の正則近傍でもあり，y の正則近傍でもある．したがって正則近傍の一意性により，x の正則近傍 D_1 を $N(\Sigma, K)$ に重ねるアンビアントアイソトピーと $N(\Sigma, K)$ を y の正則近傍 D_2 に重ねるアンビアントアイソトピーがある．これらを引き続き適用すれば，D_1 を D_2 に重ねることができる．この事実が「曲面の内部のディスクを選ぶ方法はまったく自由でよい」ということの証しであり，曲面のハンドル接着の定義を可能にしているのである．このことは曲面に限らず，n 次元多様体内部の n-球を考えるときもまったく同様である．

1.7　連続写像を飼い慣らす

これまでに眺めてきたいくつかの事例からもわかるように，位相空間や連続写像といった概念が許す内容は意外に複雑で，その扱いは困難である．けれども研究対象の位相空間を（コンパクトな）多面体や可微分多様体に限定すれば，その組合せ構造（=複体構造）や微分構造などから研究の手がかりが得られることが多い．PLトポロジーや微分トポロジーが発展してきた理由の一端はそこにある．とくに2，3次元の多様体を研究対象とする低次元トポロジーでは，多様体の組合せ構造が本質的な役割を果たしている．

組合せ構造をトポロジー解明の手段とするときには，連続写像とPL写像の関係を明らかにしておくことが大切である．そこでこの章の締めくくりとして「連続写像を飼い慣らす方法」について考えてみよう．すなわち，与えられた連続写像からその性質をほとんど変えないようなPL写像をつくり，さらにそれをもっと扱いやすい写像（=非退化なPL写像）へと改良する方法である．それらは“写像の近

似" によって遂行される．

1.7.1　連続写像の PL 化

$f,g : X \to Y$ を位相空間 X から距離空間 (Y,ρ) への連続写像とし，ε を正の数とする．このとき，任意の点 $x \in X$ に対して

$$\rho(f(x),\ g(x)) < \varepsilon$$

であるような連続写像 $g : X \to Y$ を f の ε **-近似**（ε-approximation）という．

連続写像 $f,g : X \to Y$ がホモトピックであるとき，それらを結ぶホモトピー

$$\{h_t\} = \{h_t : X \to Y \,|\, 0 \leq t \leq 1, h_0 = f, h_1 = g\}$$

で，任意の $x \in X$ に対して

$$\rho(f(x), h_t(x)) < \varepsilon$$

を満たすものがあれば，それを ε-**ホモトピー**という．とくに，このホモトピー $\{h_t\}$ がアイソトピーであるときは，$\{h_t\}$ を ε-**アイソトピー**という．

まずはじめに，多面体 P から多面体 Q への連続写像 $f : P \to Q$ について考える．このような f は単体写像で近似できる．この定理を**単体近似定理**という．

【定理 1.7】　多面体 $P = |K|$ から多面体 $Q = |L|$ への連続写像 $f : P \to Q$ に対して，f とホモトピックな PL 写像 $g : P \to Q$ で，任意の点 $p \in P$ に対して $f(p)$ と $g(p)$ の間の距離が mesh L を超えないものが存在する．このような g を f の**単体近似写像**（simplicial approximation map）という．

この定理を示すための準備として，ルベーグ数の概念を導入する．

【補題 1.8】　(X,ρ) をコンパクト距離空間，$\{U_\nu\}$ を X の開被覆とする．このとき『X の部分集合 A が diam $A < \lambda$ を満たすならば，A を含む $U \in \{U_\nu\}$ が存在する』という性質をもつ正の数 λ がある．このような数 λ を開被覆 $\{U_\nu\}$ の**ルベーグ数**（Lebesgue number）という．

証明　距離空間 X の部分集合のうち，$\{U_\nu\}$ のどの開集合にも含まれないようなものの全体を Λ とする．$\lambda = \inf\{\operatorname{diam} B | B \in \Lambda\}$ とおく．$\lambda \neq 0$ を示せばよい．Λ に属する部分集合の列 $B_1, B_2, \cdots$ を，$n \to \infty$ のとき $\operatorname{diam} B_n \to \lambda$ となるように選び，それぞれの B_n から1点ずつ b_n を選ぶ．コンパクト距離空間の任意の点列は収束部分列をもつから，必要があれば $\{b_n\}$ の部分列をとることにより，$b_n \to b \in X$ としてよい．いま，$b \in U$ なる開集合 $U \in \{U_\nu\}$ を1つ選び，

$$\inf\{\rho(x,b) | x \in X - U\} = 2\mu$$

とおけば，$\mu > 0$ であって，$b \in X$ の 2μ-開近傍 $V_{2\mu}(b)$ は U に含まれる．ここで，$\operatorname{diam} B_n = \kappa n$ とおこう．さて n を十分大きくとれば，$b_n \in V_\mu(b)$ となる．もしも $\kappa n < \mu$ であれば $B_n \subset V_{2\mu} \subset U$ となるが，これは $B_n \in \Lambda$ の仮定に反する．したがって，ある番号 N より大きな番号 n に対しては，つねに $\kappa n \geq \mu$ がなりたつ．よって，$\lambda \geq \min\{\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_N, \mu\} > 0$. ■

単体近似定理の証明　複体 L の頂点 v に対して，$O(v) = \operatorname{Int}|\operatorname{St}(v,L)|$ は多面体 $|L|$ における v の開集合になっている．これを v の**開スター**（open star）という．L のすべての頂点の開スターの集合 $\{O(v)|v \in L\}$ は $Q = |L|$ の開被覆であるから，$U(v) = f^{-1}(O(v))$ とすれば，$\{U(v)\}$ は P の開被覆である．λ を $\{U(v)\}$ のルベーグ数とする．いま，n を十分大きくとって，$K^{(n)}$ の各頂点の開スターの直径が λ 以下になるようにしておく．ただし，$K^{(n)}$ は K の n 次重心細分である．そのとき，$K^{(n)}$ の任意の頂点 p に対し，p の開スター $O(p) = \operatorname{Int}|\operatorname{St}(p, K^{(n)})|$ を含む P の開集合 $U(v) \in \{U(v)\}$ がある．そのような頂点 $v \in L$ を1つ選び，$\psi(p) = v$ と定める．$K^{(n)}$ のすべての頂点に対してこのように定められた写像 ψ は，$K^{(n)}$ から L への単体写像 $\psi : K^{(n)} \to L$ へ自然に拡張できる（問題1.7）．そのとき，ψ から定まるPL写像 $|\psi| : |K^{(n)}| \to |L|$ が求めるべき写像 $g : P \to Q$ の性質をもっている．この $g = |\psi|$ が f とホモトピックであることを確認しておこう．点 $x \in P$ に対し，$x \in \operatorname{Int}\sigma$ となる単体 $\sigma \in K^{(n)}$ が一意に存在する．$f(x)$ は $g(\sigma) \prec \tau$ となるどれかの単体 $\tau \in L$ の内部にあるから，$f(x)$ と $g(x)$ を結ぶ線分は $\operatorname{Int}(g(\sigma)) \cup \operatorname{Int}\tau$ のなかにある．この線分を $1-t:t$ に内分する点を $H(x,t)$ と

すれば，$H.: (x,t) \to H(x,t)$ は $P \times I$ から Q への連続写像であり，

$$H(x,0) = f(x),\ H(x,1) = g(x)$$

となる．すなわち $f \simeq g$ である．$f(x)$ と $H(x,t)$ との間の距離は $\operatorname{diam} \tau$ 以下であるから $d(f(x), H(x,t)) \leq \operatorname{mesh} L$ である． ■

問題 1.7 $K^{(n)}$ の任意の単体 $\sigma = p_1 p_2 \cdots p_k$ に対し，$g(p_1), g(p_2), \cdots, g(p_k)$ が張る凸集合は L の単体になっていることを示せ．

1.7.2 非退化 PL 写像

多面体 P から多面体 Q への PL 写像 $f: P \to Q$ に対して，P, Q の三角形分割 K, L とそれらの間の単体写像 $\psi: K \to L, |\psi|| = f$, で，

$$\text{任意の}\ \sigma \in K\ \text{に対して，}\ \dim \psi(\sigma) = \dim \sigma$$

となるものが存在するならば，f は**非退化**（non-degenerate）であるという．

多面体から PL 多様体への PL 写像があったとき，これを非退化な PL 写像で近似する方法について考えよう．準備として，多面体から球への PL 写像について調べておく．

R^n 内の有限個の点が張るアファイン部分空間 Λ は，$\dim \Lambda \leq n-1$ であるとき，R^n の**超平面**（hyperplane）であるという．R^n の有限個の点の集合 V に対して，V の部分集合から得られるすべての超平面の和集合を ΩV と表そう．ΩV は R^n のなかの測度 0 の閉集合であるから，$R^n - \Omega V$ は R^n 内で稠密である．

【補題 1.9】 Q を多面体とし，X, Y をそれぞれ Q の部分多面体とする．Q から n-球 B^n $(n \geq \dim Q)$ への PL 写像 $f: Q \to B^n$ があって，f は $X \cap Y$ 上で非退化であるとする．そのとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，PL 写像 $h: Q \to B^n$ として

(i) X 上では h は非退化写像

(ii) Y 上では $h = f$

(iii) $h(Q - Y) \subset \operatorname{Int} B^n$

(iv)　h は f と ε-ホモトピック (rel.Y)

となるものがとれる．

証明　$f: Q \to B^n$ は PL 写像であるから，多面体 Q, n-球 B^n の三角形分割 K, L として，任意の単体 $\sigma \in K$ に対して $\mathrm{diam}\, f(\sigma) < \varepsilon/2$ であり，かつ，単体写像 $\psi: K \to L$ で $|\psi| = f$ となるものがとれる．さらに，複体 K は $X = |K_X|, Y = |K_Y|, X \cap Y = |K_{X\cap Y}|$ であるような部分複体 $K_X, K_Y, K_{X\cap Y}$ をもち，$f|K_{X\cap Y}$ は非退化単体写像であるものとしてよい．一方，$B^n = |L|$ は R^n の凸多面体として一般性を失わない．さて，K_X の頂点に対して

$$v_1, \cdots, v_r \in K_{X\cap Y}, \quad v_{r+1}, \cdots, v_s \in K_X - K_{X\cap Y}$$

となるように番号をつける．$i \leq r$ なる v_i に対しては $w_i = f(v_i)$ と定め，$r+1 \leq i \leq s$ なる v_i に対しては，$f(v_i)$ の十分近くの点 w_i を

$$w_i \notin \Omega\{w_1, \cdots, w_{i-1}\}, \text{かつ}\, w_i \in \mathrm{Int}\, B^n$$

となるように選ぶ．そこで K の各頂点 v に対して

$$h(v) \;=\; \begin{cases} w_i & (v = v_i \text{のとき}) \\ f(v) & (v \in K - K_X \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定め，それを PL 写像 $h: Q \to B^n$ へ拡張する．ここで，$B^n = |L|$ は凸多面体だから，$\Omega\{w_i | w_i \in B^n, 1 \leq i \leq s\}$ を利用して L を凸胞複体に細分し，さらにそれを単体的複体に細分することができるし，拡張写像 $h: Q \to B^n$ は一意に定めることができる．さて，この写像 h が $X = |K_X|$ 上で非退化となるようにできるかどうかの確認は，各単体 $\sigma \in K_X$ に対する $h|\sigma$ について調べておけば十分である．この事実は $\dim \sigma$ についての帰納法で示すことができる．まず，$\sigma \in K_X \cap K_Y$ ならば $h = f$ で，f は $K_X \cap K_Y$ 上では非退化だから h も非退化である．つぎに，$\sigma \in K_X - K_Y$ とすると，σ は K_X のいくつかの頂点 v_j を用いて

$$\sigma = u_1 \cdots u_t,\, u_k = v_{j_k},\, j_1 < \cdots < j_t,\ \text{ただし}\ r < j_t$$

と書ける．$\{u_1, \cdots, u_{t-1}\}$ が張るアファイン部分空間を Λ とすると，$\dim Q \leq n$

だから $\Lambda \neq R^n$. よって $h(u_t)$ を, $h(u_t) \notin \Lambda$ となるようにとれる. このとき $h(u_1), \cdots, h(u_t)$ は独立であるから $h|\sigma$ は非退化である. ■

【定理 1.10】 多面体 P から n 次元コンパクト PL 多様体 $M^n\,(n \geq \dim P)$ への PL 写像 $f : P \to M^n$ があるとき, 任意の正の数 ε に対して, PL 写像 $g : P \to M^n$ として

(i)　g は非退化写像

(ii)　g は f と ε-ホモトピック

となるものがとれる. このような写像 g のことを f の**非退化 PL ε-近似**とよぶ.

証明　ここでは, $f(P) \cap \partial M^n = \emptyset$ の場合についてだけ考えることにしよう. さて, $f(P) \subset \operatorname{Int} M^n$ の各点 x に対し,

$$x \in \operatorname{Int} D_x \subset D_x \subset \operatorname{Int} C_x \subset C_x \subset \operatorname{Int} B_x \subset B_x$$

なる PL n-球の 3 対 (B_x, C_x, D_x) をとる. $f(P) \in \bigcup_{x \in f(p)} \{\operatorname{Int} D_x\}$ であるから, $\{U_x\} = \{U_x | U_x = f^{-1}(\operatorname{Int} D_x), x \in f(P)\}$ は P の開被覆になっている. P はコンパクトであるから, そのうちの有限個 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ で P を覆うことができる. 各 U_i に対応する n -球の 3 対を (B_i, C_i, D_i) とする.

$$\begin{aligned} Q_i &= f^{-1}(C_i) \\ X_i &= f^{-1}(D_i) \\ Y_i &= f^{-1}(\partial C_i) \cup ((X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{i-1}) \cap Q_i) \end{aligned}$$

とおく. f は PL 写像であるから, Q_i は多面体であり, X_i, Y_i はその部分多面体である. また, $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k = P$ である. さて, PL 写像 f の近似として, $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_i$ 上で非退化になるような $g_i : P \to M^n$ を, 順々につくっていこう. まず, $f_1 = f|Q_1 : Q_1 \to B_1$ に対して補題 1.9 を適用すれば, その近似 $h_1 : Q_1 \to B_1$ として

a_1) h_1 は $X_1 = f^{-1}(D_1)$ 上では非退化 PL 写像,

b₁) $Y_1 = f^{-1}(\partial C_1)$ 上では $h_1 = f$,

c₁) $h_1 \simeq f$ (rel. Y_1),

d₁) $h_1(Q_i) \subset \operatorname{Int} B_i$,　$h_1(X_i) \subset \operatorname{Int} C_i$, $i = 2, \cdots, k$

となるものが得られる．そこで $g_1 : P \to M^n$ を

$$g_1|Q_1 = h_1,\ g_1|P - Q_1 = f$$

と定めれば，g_1 は f の PL 近似で，X_1 上では非退化になっている．

つぎに，$f_2 = g_1|Q_2 : Q_2 \to B_2$ に対して補題 1.9 を適用すれば，その近似 $h_2 : Q_2 \to B_2$ として

a₂) X_2 上では h_2 は非退化 PL 写像,

b₂) $Y_2 = f^{-1}(\partial C_2) \cup (X_1 \cap Q_2)$ 上では $h_2 = g_1$,

c₂) $h_2 \simeq g_1$ (rel. Y_2),

d₂) $h_2(Q_i) \subset \operatorname{Int} B_i$,　$h_2(X_i) \subset \operatorname{Int} C_i, i = 3, \cdots, k$

となるものが得られる．そこで，この h_2 を P に拡張して，$X_1 \cup X_2$ 上では非退化になっているような g_1 の PL 近似写像 $g_2 : P \to M^n$ をつくる．

以下同様にして，$f_i = g_{i-1}|Q_i : Q_i \to B_i$ に対する PL 近似 $h_i : Q_i \to B_i$ を経由して，g_{i-1} の PL 近似で $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_i$ 上では非退化となるような写像 $g_i : P \to M^n$ を構成できる．その最終結果として得られる g_k が，f に対して求めるべき非退化近似写像である．■

連続写像を非退化 PL 写像で近似する方法の概要は以上のとおりだが，精密に議論するにはもう少し準備が必要である．詳しくはハドソン（[16]，第 IV 章，General Position，pp. 90-108）を参照されたい．

1.7.3　非退化写像の自己交叉

多様体のなかの図形がどのように交叉しているのか，その置かれている様子を調べることは，多様体の研究にとって欠かせない作業である．ここでは，直線や曲

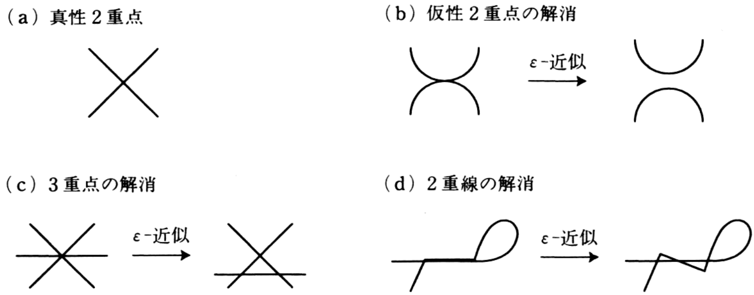


図 1.20　$f(R^1)$ の自己交叉の例

面を非退化 PL 写像で平面や 3 次元多様体のなかへ移したときの，像の自己交叉のありさまを簡単に観察しておこう．

まず，直線 R^1 から平面 R^2 のなかへの非退化 PL 写像 $f: R^1 \to R^2$ の様子を眺めてみよう．

直線の像 $f(R^1) \subset R^2$ が自分自身にぶつかるもっとも簡単なパターンは，その共有点 x の原像がちょうど 2 点であり，x の近くでは像 $f(R^1)$ の各点 $(\neq x)$ の原像はちょうど 1 点である場合である．ややこしい言い回しをしてしまったが，要するに（局所的に）2 本の曲線が 1 点だけを共有している状態のことである．この共有点 x のことを **2 重点**という．このような 2 重点としては，2 本の曲線が交叉して得られるもの（図 1.20(a)）が一般的であるが，例外として 2 本の曲線が 1 点で接している場合も考えられる．2 重点がこのような接点の場合には，その近くを少し揺すぶっただけで 2 重点を解消することができる（図 1.20(b)）．これを《仮性の 2 重点》という．これに対して交叉点の場合は，少々揺すったぐらいではこの 2 重点を解消することはできないので《真性の 2 重点》という．

2 重点が真性のものばかりだとすれば，2 重点の近くでは 2 本の曲線は（接しているのではなく）いつでもどこでも交叉しているのだから，像 $f(R^1)$ を眺めただけで f の様子はわかる．

直線の像 $f(R^1) \subset R^2$ が自分自身に 1 点でぶつかるパターンとしては，2 重点以外にも，3 本，4 本の曲線が 1 点を共有する 3 重点，4 重点などがある．これらの

共有点を含む像 $f(R^1)$ をこのまま眺めていただけでは，f の様子がどうなっているのか知ることはできないが，共有点の近くで像 $f(R^1)$ を少し揺らしてやることにより，その付近では共有点がすべて真性2重点であるような図形に直せる（図1.20(c)）ので，この（真性2重点だけからなる）像の配置から写像 f の正体を知ることができる．

平面 R^2 内では，2本の線分の像がまったく重なってしまう場合も考えられる．この場合にも，重なっている2本の線分の片方を少し動かして，重なりがたかだかいくつかの真性2重点だけであるように修正することができる（図1.20(d)）．

このように，非退化PL写像 f で直線を平面内に移したとき，その像 $f(R^1) \subset R^2$ が自分自身にぶつかるパターンはいろいろあるが，必要に応じて f を ε-近似で改良すれば，直線の像の共有点がすべて真性2重点であるような非退化PL写像に修正できそうである．したがって，直線 R^1 から平面 R^2 への連続写像は，真性2重点でしか自己交叉しないような非退化PL写像で ε-近似できるだろう．(じつは，直線 R^1 はコンパクトでないので，R^1 の両端が暴れることもあり，そんなに楽観的な状況にあるわけではない.)

曲面 F から3次元PL閉多様体 M^3 への非退化PL写像 $f: F \to M^3$ における自己交叉の様子は，直線から平面のなかへの場合と比べてはるかに複雑ではあるが，局所的な形状で重要なものは図1.21の3つのパターンである．

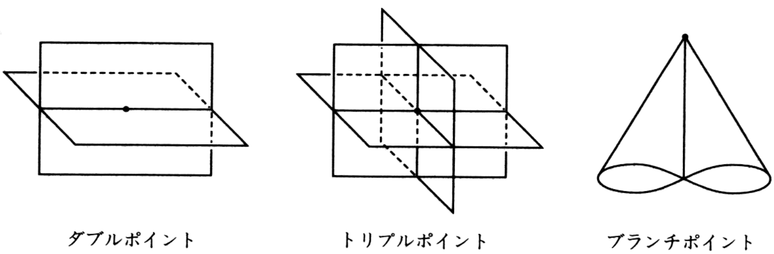


図 1.21　自己交叉する点の近傍3態

長方形の形をした2枚の紙が（真性に）交叉している図を近傍としてもつ点のことを**ダブルポイント** (double point) という．ダブルポイントの全体からなる集合

の連結成分の閉包は線分であったり円周であったりする．これらを**ダブルライン** (double line) という．

3 枚の長方形の紙が（真性に）交叉している図を近傍としてもつ点のことを**トリプルポイント** (triple point) という．

2 つの円錐が 1 本の母線を共有するような形で（真性に）交叉している図を近傍にもつときの頂点を**ブランチポイント** (branch point) という．また，このときの共通母線のことを**ブランチライン** (branch line) ということもあるが，これはダブルラインにほかならない．

さて，つぎの有用な定理がなりたつ．

【定理 1.11】　閉曲面から 3 次元多様体への連続写像は有限個のダブルライン，トリプルポイント，ブランチポイントだけを自己交叉としてもつような非退化 PL 写像で近似できる．

証明の方針を述べておこう．「3 次元多様体は三角形分割可能である」ことを前提にすると，閉曲面から 3 次元多様体への連続写像は非退化 PL 写像で近似できる．そこで線形数学の "一般の位置" の概念を用いれば，曲面どうしが交叉する部分が1次元以下であるように，ε -近似で修正できる．しかもこのとき，1次元の

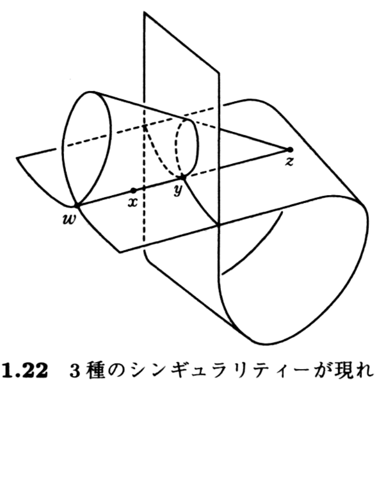


図 1.22　3 種のシンギュラリティーが現れる例

部分の点はすべてダブルポイントだけであるようにできる．残されたのは頂点の部分だけであるから，“一般の位置”の考え方により，その部分をふたたび ε-近似で修正してトリプルポイント，ブランチポイント以外の交差点を消滅させてやればよい．

ダブルライン，トリプルポイント，ブランチポイントを総称して**シンギュラリティー** (singularity) ということもある．図1.22では，点 x はダブルポイント，点 y はトリプルポイント，点 z はブランチポイントである．また線分 wy や線分 yz はダブルラインである．点 x の近傍は見やすいが，点 y の近傍は少し見づらい．点 z がほんとうに図1.21にあるようなブランチポイントの近傍をもっていることを理解するには，いくばくかの直観のトレーニングを必要とする．

参考文献

[1] アレクサンドロフ，P. 著，三瓶与右衛門・千葉克裕訳: 位相幾何学 I（共立全書），共立出版（1957）

[2] 河田敬義: 位相数学（基礎数学講座 21），共立出版（1956）

[3] 野口　広: 数学者群像，河出書房新社（1970）

[4] 本間龍雄: 組み合せ位相幾何（数学ライブラリー 29），森北出版（1972）

[5] 本間龍雄: 組み合せ位相幾何学（共立全書），共立出版（1980）

[6] 本間龍雄: ポアンカレ予想物語（数セミ・ブックス），日本評論社（1985）

[7] J.W.Alexander: An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **10**, 8-10 (1924)

[8] L.Antoine: Sur la possibilite d'etendre l'homeomorphie de deux figures a leurs voisinages, C. R. Acad. Sci. Paris, **171**, 661-663 (1920)

[9] L.Antoine: Sur l'homeomorphie de figures et de leurs voisinages. J. Math. Pures Appl., **86**, 221-325 (1921)

[10] M.Brown: A proof of the generalized Schoenflies theorem. Bull. Amer. Math. Soc., **12**, 812-814 (1961)

[11] H.R.Brahana: Systems of circuits on two-dimensional manifolds. Ann. of Math., **23**, 144-168 (1922)

[12] M.Brown: A proof of the generalized Schoenflies theorem. Bull. Amer.Math. Soc., **12**, 812-814 (1961)

[13] G.de Rham: Lectures on Introduction to Algebraic Topology. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1969)

[14] L.C.Glaser: Uncountably many contractible open 4-manifolds. Topology, **6**, 37-42 (1967)

[15] L.C.Glaser: Geometrical Combinatorial Topology I, II. Van Nostrand Rein hold Co., London (1972)

[16] J.F.P.Hudson: Piecewise Linear Topology. Benjamin, Inc, New York (1969)

[17] W.S.Massey: Algebraic Topology:An Introduction. Springer-Verlag, New York (1967)

[18] E.E.Moise: Geometric Topology in Dimensions 2 and 3. Springer-Verlag, New York (1977)

[19] J.H.C.Whitehead: Simplicial spaces, nuclei and m-groups. Proc. London Math. Soc., **45**, 243-327 (1939)

[20] E.C.Zeeman: Seminar on combinatorial topology. I.H.E.S., Paris (1963)

2

レンズ空間

3次元幾何学トポロジーとは

2次元多様体については本物の図形をみる(R^3の中に表現する)ことによってまた本物の図形を切る，貼り付けるという操作をすることによって，いろいろな結果が得られた．この思想を3次元に持ち込み，図形を頭のなかに描き，それに操作を加えて(たとえば切り取ってそれらをR^3内に見てみたり，また貼り付けたりして)，図形の変化を考えながら，操作，変形の数学的意味を考え，あるいは利用して多様体の分類，性質等の研究を発展させるということが考えられる．これが幾何学トポロジーの真骨頂だと思う．空想の世界に図形を描くのであるから好きな変形を自由に考え空想することによって，いろいろな興味のある対象に出合うことができる．自分でそのような興味をもつものを見つけて面白さを味わい，さまざまな知識を身につけよう．

2.1 基　本　群

すでに理解している人はとばしてもらってもかまわないが，この章において使うので，はじめに 基本群 (fundamental group) の定義の見直しをしておこう．

2.1.1 基本群の定義

閉区間 $I = [0;1]$ から 位相空間 X への連続写像 $\varphi : I \to X$ による像 $J = \psi(I)$ と写像 ψ を合わせた $w = (J, \psi)$ のことを (X 上の) **道** (path) という (連続写像 ψ 自身を道ということも多い)． $\psi(0) = x_0$, $\psi(1) = x_1$ をそれぞれ，道 w の**始点**

(initial point), **終点** (terminal point) という．2 つの道 $w_1 = (J_1, \psi_1)$, $w_2 = (J_2, \psi_2)$ において, w_1 の終点と w_2 の始点とが一致するとき，$\psi_3 : I \to X$ を

$$\psi_3(s) = \begin{cases} \psi_1(2s) & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ \psi_2(2s-1) & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

と定めると X 上に 新しい道 $w_3 = (J_3, \psi_3)$ が得られる．これを w_1 と w_2 の**積** (product) といい，$w_3 = w_1 w_2$ と表す．w_1 が x_0 から x_1 への道，w_2 が x_1 から x_2 への道であれば，w_3 は x_0 から x_2 への道である．

また 道 $w = (J, \psi)$ が x_0 から x_1 への道であれば，

$$\varphi(s) = \psi(1-s) \quad 0 \leq s \leq 1$$

と定めると，$\varphi : I \to X$ は x_1 から x_0 への道である．これを道 w の **逆** (inverse) といい，w^{-1} で表す．明らかに，$(w^{-1})^{-1} = w$ である．

任意の $t \in I$ に対して，$\psi(t) = x_0$ (すなわち $\psi(I) = x_0$) と定めると，この定値写像 ψ は x_0 から x_0 への道になっている．この道を O と表そう．

位相空間 X 内の 2 点 x_0 と x_1 を結ぶ 2 つの道 $w_1 = (J_1, \psi_1)$, $w_2 = (J_2, \psi_2)$ に対して，ψ_1 と ψ_2 を結ぶホモトピー (すなわち, $H(s,0) = \psi_1(s)$, $H(s,1) = \psi_2(s)$ を満たす連続写像) $H : I \times I \to X$ で $H(0,t) = x_0$, $H(1,t) = x_1$ となるものがあるとき，w_1 と w_2 は**ホモトピック** (homotopic) **な道**であるといい，$w_1 \simeq w_2$ と表す．道 w とホモトピックな道全体を $[w]$ で表し，これを (w の定める) **ホモトピー類**

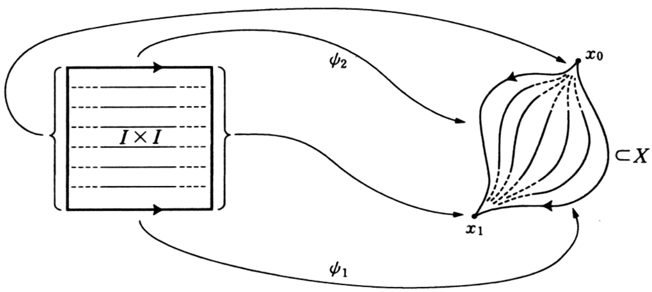


図 2.1 ホモトピー

(homotopy class) という (図 2.1).

【補題 2.1】　(1) $\lambda, \mu : I \to I$ を $\lambda(0) = \mu(0)$, $\lambda(1) = \mu(1)$ なる連続写像とし, $w = (J, \psi)$ を勝手な道とする．そのとき，$w_\lambda = \psi \circ \lambda$, $w_\mu = \psi \circ \mu : I \to X$ が定める道 w_λ と w_μ は ホモトピックである ($\circ$ は写像の合成を表す).

(2) w を X 上の道とする．そのとき,

(i)　w_i $(i = 1, 2, 3)$ が x_i から x_{i+1} への道であれば,

$$(w_1 w_2) w_3 = w_1 (w_2 w_3)$$

(ii)　$wO \simeq w, \quad Ow \simeq w$

(iii)　$ww^{-1} \simeq O, \quad ww^{-1} \simeq O$

(3) w, w' を x_0 から x_1 への道，u, u' を x_1 から x_2 への道とするとき

(i)　$w \simeq w'$, $u \simeq u'$ ならば $wu \simeq w'u'$

(ii)　$w \simeq w'$ ならば $(w)^{-1} \simeq (w')^{-1}$

X における始点と終点が一致している道を**閉じた道** (closed path, loop) といい，そのときの始点を w の **基点** (base point) という.

いま X 内の 1 点 x_0 を選び, x_0 を基点とする X の閉じた道全体を $W(X, x_0)$ とする．道 $w \in W(X, x_0)$ の定めるホモトピー類 $[w]$ を $\pi_1(X, x_0)$ で表す．そして $[w_1], [w_2] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して

$$[w_1][w_2] = [w_1 w_2]$$

と積を定めると $\pi_1(X, x_0)$ は この積によって群になる．群 $\pi_1(X, x_0)$ を，x_0 を基点とする X の**基本群** (fundamental group) という.

2.1.2　基本群の性質

基本群の定義は基点 x_0 の選び方に依存するが，じつは，X が弧上連結であれば，任意の 2 点 $x_0, x_1 \in X$ に対して，同型 $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ である．すなわち，抽象的な群の構造は基点のとり方によらない．今後断らない限り弧上連結

な空間だけを扱うので，基本群の代数構造だけに着目するときは，基点を明示しないで $\pi_1(X)$ と表すことが多い．一般には，基本群は非可換である．単位群 (=単位元のみよりなる群) を 1 と表すことも多い．

■ **例 2.1** ■ (1) 可縮空間の基本群は単位群である．また，球面 S^2 の基本群も単位群である．弧上連結な位相空間 X において，$\pi_1(X)$ が単位群であるとき，X は**単連結** (simply connected) である，あるいは **1-連結** (1-connected) であるという．

(2) 円周 S^1 の基本群は $\pi_1(S^1) \cong Z$ である．ただし，Z は無限巡回群．

(3) ブーケ $S^1 \vee S^1$ の基本群 $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ はランク 2 の自由群 $Z * Z$ である．これは 2 つの元から生成される非可換な無限群である．

連続写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき，ホモトピー類

$$[w] \in \pi_1(X, x_0),\ w = (\psi(I), \psi)$$

に対して，

$$u = (f(\psi(I)), f \circ \psi),\ y_0 = f(x_0)$$

とすれば，$[u]$ は $\pi_1(Y, y_0)$ のホモトピー類である．$f_*([w]) = [u]$ と定めれば，f_* は $\pi_1(X, x_0)$ から$\pi_1(Y, y_0)$ への準同型写像になっている．

直積空間 $X \times Y$ に対して，

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

という関係がある．ただし，右辺の式は 群の直積を表す．

2.2 レンズ空間

3 次元多様体の具体的な例として，S^3 のつぎに簡単だと思われるレンズ空間 $L(p, q)$(射影空間 P^3 を含む) を初めに紹介し，3 次元多様体に慣れ親しんでもらうことを期待して，この節を始めよう．

2.2.1 レンズ空間の構成法その 1

最初にレンズ空間の構成法を説明しよう．

まず 2 以上の正の整数 p を考え，つぎに p と互いに素な正の整数 q が与えられたとする (簡単のために $q<p$ としておく)．このときレンズ空間 $L(p,q)$ の構成法を述べる．

まず 3 次元ユークリッド空間 R^3 のなかの 3 次元球

$$B^3=\{(x,y,z)\in R^3\ ;\ x^2+y^2+z^2\leq 1\ \}$$

を考える．この境界 ∂B^3 は

$$\{(x,y,z)\in R^3\ ;\ x^2+y^2+z^2=1\ \}$$

となるが，この 3 次元球 B^3 の境界は (2 次元) 球面とよばれていて，普通 S^2 で表す．すなわち $\partial B^3=S^2$ である．

つぎに赤道

$$e=\{(x,y,z)\in S^2\ ;\ x^2+y^2+z^2=1,\ z=0\ \}$$

を p 等分する．その等分点を図 2.2 の左図のように，

$$a_0=(1,0,0),\ a_1=\left(\cos\frac{2\pi}{p},\sin\frac{2\pi}{p},0\right),\cdots,a_i=\left(\cos\frac{2\pi i}{p},\sin\frac{2\pi i}{p},0\right),$$
$$\cdots,a_{p-1}=\left(\cos\frac{2\pi(p-1)}{p},\sin\frac{2\pi(p-1)}{p},0\right)$$

とする．

そして，図 2.2 の右図のように，a_i を通る経線 (北極 $N=(0,0,1)$，南極 $S=(0,0,-1)$，a_i を通る S^2 上の大円で a_i のある側) を ℓ_i とし，ℓ_i，ℓ_{i+1} で囲まれる領域は e によって 2 つに分けられるが，その上側 (北半球側) を U_i，下側 (南半球側) を D_i とする．そして，S^2 につぎのように同値関係 $\sim$ を入れる．

【同値関係の説明】ℓ_i を ℓ_{i+q} に，ℓ_{i+1} を ℓ_{i+q+1} に，N を S になるように，D_i と U_{i+q} とを貼り合わせる．すなわち $s_1=(x_1,y_1,z_1)$, $s_2=(x_2,y_2,z_2)$ としたとき，$s_1\sim s_2$ とは，$h\geq 0, 0\leq\varphi\leq 2\pi$ を使って，$x_1=\sqrt{1-h^2}\cos\varphi$，$y_1=$

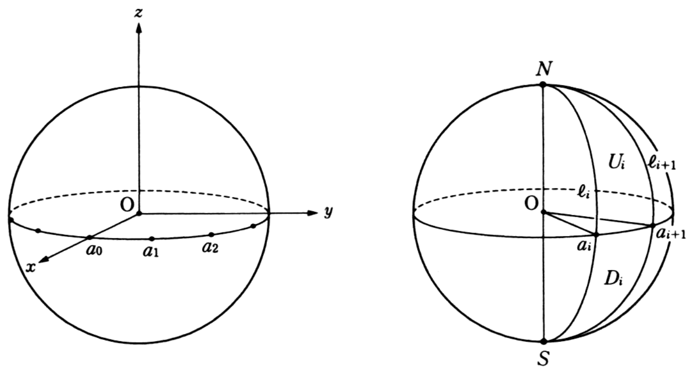


図 2.2 レンズ空間の構成法 1-(1)

$\sqrt{1-h^2}\sin\varphi, z_1 = h$ と（円柱座標で）表せば,

$$\text{(内部では)}\ x_2 = x_1,\ y_2 = y_1,\ z_2 = z_1$$
$$\text{(球面上では)}\ x_2 = \sqrt{1-h^2}\cos\left(\varphi + \frac{2\pi q}{p}\right),\ y_2 = \sqrt{1-h^2}\sin\left(\varphi + \frac{2\pi q}{p}\right),$$
$$z_2 = -h$$

のときと定める (図 2.3).

B^3 をこの同値関係で割った商空間 $B/\sim$ を, **レンズ空間** といい, $L(p,q)$ で表す.

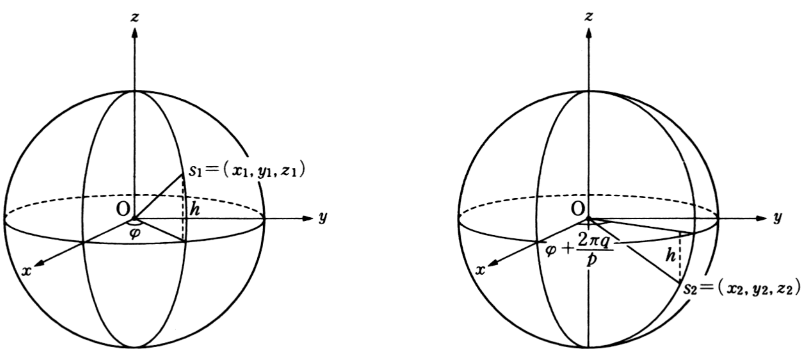


図 2.3 レンズ空間の構成法 1-(2)

問題 2.1　レンズ空間 $L(p,q)$ は，3 次元多様体であることを示せ．

2.2.2　レンズ空間の構成法その 2

つぎにもうひとつ別のレンズ空間の構成法を説明をしよう．$S^3 \subset R^4$ と考える．すなわち

$$S^3 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \ ; \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \}$$

と表されるが，これを 複素数で表してみよう．そのために，$z_1 = x_1 + x_2 i$，$z_2 = x_3 + x_4 i$ (i は虚数単位) とおくと，$z = x + yi$ ならば，$||z|| = x^2 + y^2$ であるから，

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = ||z_1||^2 + ||z_2||^2$$

となる．よって，

$$S^3 = \{ (z_1, z_2) \in C^2 \ ; \ ||z_1||^2 + ||z_2||^2 = 1 \}$$

と表せる．ここで，p を 2 以上の正の整数，q を p と互いに素である正の整数とし (ここでも簡単のために，$q < p$ としておく)，$T_{pq} : S^3 \to S^3$ を

$$T_{pq}(z_1, z_2) = (z_1 \, e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2 \, e^{\frac{2q\pi i}{p}})$$

で定義される写像とする．すると T_{pq} は S^3 から S^3 の上への同相写像である．そして，S^3 の同相写像すべてからなる群 $\mathcal{H}(S^3)$ を考え，T_{pq} によって生成される $\mathcal{H}(S^3)$ の部分群を G とする．すると G は p 個の元 $\{T_{pq}, T_{pq}^2, \ldots, T_{pq}^{p-1}, T_{pq}^p = 1\}$ をもつ．さらに T_{pq}^j $(1 \leq j \leq p)$ は，$j = p$ を除いて 不動点をもたないことが容易にわかる．このとき，レンズ空間 $L(p,q)$ は S^3 に作用する群 G の**軌道空間** (orbit space) として定義される (詳しくは 2.4 節参照)．すなわち，$L(p,q) = S^3/\sim$ である．ここに 同値関係 $\sim$ は，

$$\forall x, y \in S^3 \text{ に対して}, x \sim y \text{ とは } \exists T \in G \ ; \ y = T(x) \text{ のとき}$$

と定めたものである．x を含む類を $[x]$ で表すことにする．

2.2.3 被覆空間としてのレンズ空間

レンズ空間においては，前の節で考えたように，S^3 からの射影 $f : S^3 \to S^3/\!\sim = L(p,q)$ があり，この f によって，S^3/N に商位相がはいっている．この射影 $f : S^3 \to S^3/\!\sim = L(p,q)$ は特別な性質をもっていることがわかる．これを被覆写像という．被覆写像，被覆空間のきちんとした定義をここで復習しておこう．

【定義 2.2】 弧上連結空間 X，$\widetilde{X}$ と，全射である連続写像 $p : \widetilde{X} \to X$ がつぎの条件を満たすとき，$(\widetilde{X}, p)$ は **被覆写像** (covering map) $\boldsymbol{p}$ **をもつ** $\boldsymbol{X}$ **上の被覆空間** (covering space) という．

X の任意の点 x に対して，x の開近傍 $U = U(x)$ が存在して，つぎを満たす．すなわち，$\forall \widetilde{x}_i \in p^{-1}(x)$ に対して，$\widetilde{x}_i$ の開近傍 $\widetilde{U}(\widetilde{x}_i)$ が存在して，

(1) $p|_{\widetilde{U}(\widetilde{x}_i)} : \widetilde{U}(\widetilde{x}_i) \to U(x)$ は $\widetilde{U}(\widetilde{x}_i)$ から $U(x)$ の上への位相同型写像

(2) $\displaystyle\bigcup_{\widetilde{x}_i \in p^{-1}(x)} \widetilde{U}(\widetilde{x}_i) = p^{-1}(U(x))$

(3) $\widetilde{x}_i$，$\widetilde{x}_j \in p^{-1}(x)$ で $\widetilde{x}_i \neq \widetilde{x}_j$ ならば，$\widetilde{U}(\widetilde{x}_i) \cap \widetilde{U}(\widetilde{x}_j) = \emptyset$

ここで，$U(x), \widetilde{U}(\widetilde{x}_i)$ を，それぞれ，x，$\widetilde{x}_i$ の**標準近傍** (canonical neighborhood) という．また $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ は x **の上にある** (lie above x) といういい方をする．また，$\widetilde{X}$ が単連結のとき，**普遍被覆空間**という．

【定義 2.3】 $p : \widetilde{X} \to X$ を被覆写像とする．このとき，$\widetilde{X}$ から $\widetilde{X}$ の上への同相写像 $g : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ で $p \circ g = p$ を満たすものを $\widetilde{X}$ の **被覆変換** (covering transformation) という．このとき，$\widetilde{X}$ のすべての被覆変換は，写像の合成を演算として群をなすが，これを **被覆変換群** (covering transformation group) といい，$H(\widetilde{X}, p)$ と表す．

さて，ここで レンズ空間 $L(p,q)$ の場合に戻ろう．S^3 がコンパクト，弧上連結，局所弧上連結であるから，$L(p,q)$ もコンパクト，弧上連結，局所弧上連結である．さらに，f が被覆写像であることがわかる．なぜならば，$\forall [x] \in L(p,q)$ に対して，

$f^{-1}([x]) = \{x, T_{pq}(x), T_{pq}^2(x), \cdots, T_{pq}^{p-1}(x)\}$ であるので，x の S^3 における開近傍 U を十分小さくとれば，$T_{pq}^i(U) \cap T_{pq}^j(U) = \emptyset$ $(i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq p)$ になるようにとれる．すると，$f(U)$ は $[x]$ の標準近傍で，$T_{pq}^i(U)$ は $T_{pq}^i(x)$ の S^3 における標準近傍である．したがって，$f : S^3 \to L(p,q)$ は被覆写像である．すると，被覆空間の理論より，$f_*\pi_1(S^3)$ は $\pi_1(L(p,q))$ の部分群となる (ここで，f_* は f により導かれる S^3 の基本群 $\pi_1(S^3)$ から $L(p,q)$ の基本群 $\pi_1(L(p,q))$ への準同型写像である)．ここから，S^3 の基本群は $\pi_1(S^3) = 1$ であるから，$f_*\pi_1(S^3) = 1$ となるので，$f_*\pi_1(S^3)$ は正規部分群である．このとき，被覆変換群を $H(S^3, f)$，と書くと，被覆空間の理論によって，$\pi_1(L(p,q))$ の $f_*\pi_1(S^3)$ による商群は被覆変換群と同型

$$\pi_1(L(p,q))/f_*\pi_1(S^3) \cong H(S^3, f)$$

であるから，$\pi_1(L(p,q)) \cong H(S^3, f)$ となる．よって，$\pi_1(L(p,q))$ を計算するために，被覆変換群 $H(S^3, f)$ を計算すればよいことがわかる．

そこで $H = H(S^3, f)$ を求めよう，まず $T = T_{pq}$ を考えると，$Tx \sim x$ より，$f(T(x)) = f(x)$ $(\forall x \in S^3)$ であるから $T \in H$ である．そこで $T = T_{pq}$ によって生成される H の部分群を G とおけば，$G = H$ であることが示される．すなわち $T^p = 1$ であるから，$G = \{T, T^2, \cdots, T^{p-1}, T^p = 1\}$ である．そこで $\forall\varphi \in H$ をとると，$f \circ \varphi = f$ であるから，$\forall x \in S^3$ に対して

$$\exists j = j(x)\ (1 \leq j \leq p)\ ;\ \varphi(x) = T_{pq}^j(x)$$

となる x に関する自然数 $j = j(x)$ が定まる．このとき，$A = \{1, 2, \cdots, p\}$ とおくと $j = j(x)$ は S^3 から A への写像，$j = j(x) : S^3 \to A$ であるが，S^3 は連結であるからその像 $j(S^3)$ も連結であり，A の連結成分は 1 点のみからなる集合 $\{m\}$ $(1 \leq m \leq p)$ だけであるから

$$j = j(x) = m$$

となる．すなわち，$x \in S^3$ に関係ない一定の値をとる．すなわち

$$\varphi = T_{pq}^m$$

といえる．よって $\varphi \in G$ である．

これから，レンズ空間 $L(p,q)$ の基本群は $\pi_1(L(p,q)) \cong H(S^3,f) = G \cong Z_p$ であることがわかる．

2.2.4　レンズ空間に関するおもな結果

ここで 閉 3 次元多様体およびレンズ空間について知られている事実を 2，3 述べて，このレンズ空間がどれだけ意味のある例を提供するか検証してみよう．

一般に (連結) 閉 3 次元多様体 M_1，M_2 に関して，M_1 と M_2 が同相 $M_1 \approx M_2$ なら，ホモトピー同値 $M_1 \simeq M_2$ である．また ホモトピー同値ならば，その基本群は 同型 $\pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_2)$ である．しかし一般には．逆は成立しないことが，レンズ空間によって例示される．

そのために，まず，レンズ空間における結果を述べておくことにする．

【定理 2.4】　基本群については，レンズ空間 $L(p,q)$ と $L(p',q')$ において，基本群が同型 $\pi_1(L(p,q)) \cong \pi_1(L(p',q'))$ である必要十分条件は，$p = p'$ である．

またホモトピー型については，

【定理 2.5】　ホモトピー同値 $L(p,q) \simeq L(p',q')$ である必要十分条件は，

$p = p'$ であって，$q = \pm m^2 q' \pmod p$ または $qq' = \pm m^2 \pmod p$ を満たす p と互いに素である整数 m が存在すること

である．

さらに位相同型については，

【定理 2.6】　同相 $L(p,q) \approx L(p',q')$ である必要十分条件は，

$p = p'$ であって，$q = \pm q' \pmod p$ または $qq' = \pm 1 \pmod p$ であること

である．

という結果が得られている．これらを使えば，たとえば，

(1) $L(7,1)$ と $L(7,2)$ は同じホモトピー型をもつが，同相でない．
(2) $L(5,1)$ と $L(5,2)$ は基本群は同じであるが，ホモトピー同値でない．

ことがわかる (詳細は，たとえば，[2] 参照).

ここで，単連結な閉 3 次元多様体について，上の問題 (逆が成立するか？) ということを考えてみよう．

Σ を単連結な閉 3 次元多様体とすると，Σ と S^3 は $\pi_1(\Sigma) \cong \pi_1(S^3)$ より，ホモトピー同値であることが ホワイトヘッド（Whitehead）[3] によって知られている．

このことを，もう少し詳しく述べよう．

つぎのような結果が得られている．閉 3 次元多様体は断らない限り連結とする．

(1) 閉 3 次元多様体 M について，ポアンカレ (Poincare) の双対定理より

$$H^2(M) \cong H_1(M)$$

$$H^1(M) \cong H_2(M)$$

である．

(2) さらに $H^1(M) \cong \text{Hom}\,(H_1(M), Z)$ であるから，

$$H_1(M) = 0 \text{ ならば } H_2(M) = 0$$

ここで $\text{Hom}\,(H_1(M), Z)$ は $H_1(M)$ から Z への準同型全体がなす群を表している．

(3) 閉 3 次元多様体 M について，その普遍被覆空間 $\widetilde{M}$ を考えると，

$$\pi_j(\widetilde{M}) \cong \pi_j(M) \qquad (j \geq 2)$$

(4) $\pi_1(\Sigma) = 1$ より，$H_1(\Sigma) = 0$ である．よって，(2) を使って $H_2(\Sigma) = 0$. フレビッツ（Hurewicz）の定理より，$\pi_2(\Sigma) \to H_2(\Sigma)$ は，$\pi_1(\Sigma) = 1$ より同型であるから，

$$\pi_2(\Sigma) = 1$$

(5) $\pi_1(\Sigma) \cong \pi_1(S^3)$ より，ホワイトヘッドのホモトピー定理 [3] により，Σ は S^3 に ホモトピー同値である．

(1)，(2)，(3)，(4) については，たとえば，[1] を参照してほしい．

しかし，閉 3 次元多様体がホモトピー同値であれば同相であるかということはまだ証明されていない．これがポアンカレの予想といわれているものである．

2.2.5 群の作用による軌道空間

あるコンパクト空間 Y で位相同型写像からなる有限群 G を許容するものを考えると，軌道空間 (orbit space) $X = Y/G$ が考えられる．もっと詳しくいうと，集合 X は Y の 2 点が G の元である位相同型写像で移りあうとき，同値であると定めたもので，X は射影 $p: Y \to X$ による商位相を入れたものとする．そして G は効果的 (effective) に作用している（すなわち，ある点 $y \in Y$ で $g(y) = y$ $(g \in G)$ ならば $g = 1$ (恒等写像) である），としよう．そのとき p は 被覆写像である．そして，もし Y が単連結ならば，X の基本群 $\pi_1(X)$ は G であることが容易にわかる．Y が単連結でない場合について，各自考えてみてほしい．

ここで，「位相同型写像からなる有限群 G を許容する」ということの意味を説明しておこう．

位相空間 X の位相同型写像全体は，明らかに群をなす．それを X の同相群といい，$\mathcal{H}(X)$ と表す．群 G から X の同相群 $\mathcal{H}(X)$ への準同型 $\alpha: G \to \mathcal{H}(X)$ のことを**群 G の 位相空間 X への作用** という．また，G は α によって X に作用する，あるいは，X は 群 G を許容するともいう．さらに X に恒等写像として作用する G の元は，**X に自明に作用する**というが，そのような元全体は，$\ker\alpha$ であるが，とくに $\ker\alpha = \{e\}$ のとき，G は**効果的に作用する**という．

2.2.6 レンズ空間の 2 つの構成法が同じレンズ空間を定めること

レンズ空間を 2 つ定義したが，つぎに，これらが同じものであることを示しておこう．2 つめの構成法によるものを $L(p,q)$ と書き，ここからはじめて，そのなかに 3 次元球をとり，この球が 1 つめの構成法の B^3 であることを示そう．

2 つ目の構成法における S^3 は $S^3 = \{(z_1, z_2)\ ;\ ||z_1||^2 + ||z_2||^2 = 1\}$ と書ける．

また

$$(z_1, z_2) = ||z_1||(z_1/||z_1||, 0) + ||z_2||(0, z_2/||z_2||) \quad (||z_1||^2 + ||z_2||^2 = 1)$$

という書き方もできる (ただし，$||z_1|| = 0$ のときは，$||z_1||(z_1/||z_1||, 0) = (0,0)$ とし，$||z_2|| = 0$ のときは，$||z_2||(0, z_2/||z_2||) = (0,0)$ とする)．さらに $S' = \{(z_1, 0) ;\ ||z_1|| = 1\}$, そして，$S'' = \{(0, z_2) ;\ ||z_2|| = 1\}$ とおくと，S', S'' はともに S^1 に同相である．$(z_1/||z_1||, 0) \in S'$, $(0, z_2/||z_2||) \in S''$ だから，$(z_1, z_2) = ||z_1||x' + ||z_2||x''$ $(x' \in S, x'' \in S'')$ と書ける．

逆に，$x' \in S', x'' \in S''$ に対して，

$$y = \lambda' x' + \lambda'' x'' \quad (\lambda', \lambda'' \in R,\ \lambda'^2 + \lambda''^2 = 1)$$

とおくと，$y \in S^3$ である．なぜならば，$x' = (z_1, 0)$, $x'' = (0, z_2)$ と書くと，$y = (\lambda' z_1, \lambda'' z_2)$ となり，$||\lambda' z_1||^2 + ||\lambda'' z_2||^2 = \lambda'^2 ||z_1||^2 + \lambda''^2 ||z_2||^2 = \lambda'^2 + \lambda''^2 = 1$ だから $y \in S^3$ である．

よって，S^3 は

$$S^3 = \{y \ ;\ y = \lambda' x' + \lambda'' x'',\ \lambda', \lambda'' \in R,\ \lambda'^2 + \lambda''^2 = 1, x' \in S', x'' \in S''\}$$

と表される．

さらに，$x' = (z_1, 0)$, $x'' = (0, z_2)$ とすると，

$$T_{pq}(\lambda' x' + \lambda'' x'') = T_{pq}(\lambda' z_1, \lambda'' z_2) = \lambda' T_{pq}(x') + \lambda'' T_{pq}(x'')$$

である．一般に

$$T^r_{pq}(\lambda' x' + \lambda'' x'') = \lambda' T^r_{pq}(x') + \lambda'' T^r_{pq}(x'')$$

が成り立つ．

$\forall x' = (z_1, 0) \in S'$ に対して，$T_{pq}(x') = (z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, 0)$ だから，$T^t_{pq}(x')$ を $(z'_1, 0)$ とかけば $0 \leq \arg z' \leq \dfrac{2\pi}{p}$ を満たす $t (= 0, 1, \cdots, p-1)$ が存在する．したがって，S^3 の部分集合 A を

$$A=\{y\ ;\ y=\lambda' x'+\lambda'' x'',\ x'=(z_1,0)\in S',\ x''=(0,z_2)\in S'',\ 0\le \arg z_1\le \frac{2\pi}{p},$$
$$\lambda',\lambda''\in R,\ \lambda'^2+\lambda''^2=1\,\}$$

とおき，射影

$$f: S^3\to L(p,q)=S^3/\!\sim$$

を考えると，$f(A)=L(p,q)$ である．そして A が 3 次元球 B^3 と同位相であることは容易にわかる．このことを写像 $\varphi: S^3\to R$ をつくって詳しくみてみよう．

$y=\lambda' x'+\lambda'' x''\in S^3$ を $(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ へ対応させるのであるが，まず y を $(\lambda' e^{2\pi i\theta_1},\lambda'' e^{2\pi i\theta_2})$ と表し，θ_1 が $k/p\le\theta_1\le(k+1)/p$ の範囲にあれば，

$$\begin{cases} x_1+ix_2=x'' e^{2\pi i\theta_2}\\ x_3=\lambda'(2p\theta_1-2k-1)\end{cases}$$

を満たすように対応させる $(k=0,1,\cdots,p-1)$．この写像を $\varphi: S^3\to R^3$ とすると，

$$\begin{aligned}\varphi(A)&=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3; x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\}\\ &=B^3\end{aligned}$$

となる．このとき $k=0$ のときが A であることを注意しておく．

A の部分集合 F, F' を

$$F=\{y\ ;\ y=\lambda' x'+\lambda'' x''\in A,\ x'=(z_1,0),\ \arg z_1=0\}$$
$$F'=\{y\ ;\ y=\lambda' x'+\lambda'' x''\in A,\ x'=(z_1,0),\ \arg z_1=\frac{2\pi}{p}\}$$

と定義すると，F，F' はともに 2 次元球 D^2 と同位相であり，$\forall\lambda' x'+\lambda'' x''\in F$ に対して，$T_{pq}(\lambda' x'+\lambda'' x'')\in F'$ であり，$y\in A-(F\cup F')$ とすると，$T_{pq}^k(y)\notin A\quad(k=1,2,\cdots,p-1)$ である．(上の写像 φ で，F は ∂B^3 の $x_3\le 0$ の部分に，F' は ∂B^3 の $x_3\ge 0$ の部分に移る．)

これより，A において，F と F' とを $T_{pq}: F\to F'$ で同一視すれば，構成法その 1 の $L(p,q)$ が得られることがわかる．

これより，この 2 つが同じであることが示された (図 2.4 参照).

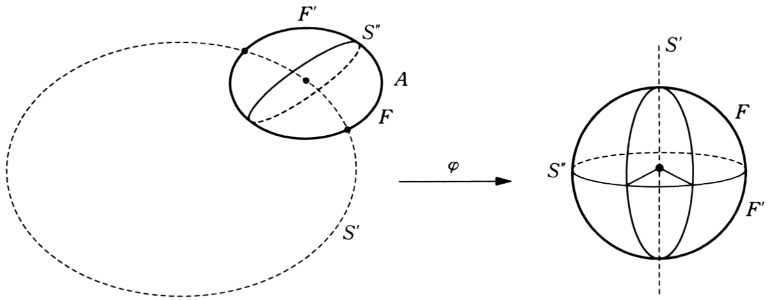


図 2.4　同じであること

2.2.7　ヘゴール (Heegaard) 分解によるレンズ空間

ここで，$f(S')$, $f(S'')$ は S^1 と同相であるから，S' の S^3 における正則近傍 $N(S';S^3)$ を H_1 と表すと，H_1 は $S^1 \times D^2$ と同位相 (ソリッドトーラス (円環体) とよばれている) である．

S' の S^3 における正則近傍 H_1 は ソリッドトーラスで，さらに，被覆写像 $f: S^3 \to L(p,q) = S^3/\sim$ を考え，その制限 $f|_{H_1}$ をみれば，S^3 において S' の十分小さい正則近傍をとると，$f(H_1)$ も $S^1 \times D^2$ と同位相になる．また $\overline{S^3 - H_1}$ は S'' の正則近傍になることがわかるので，これを H_2 とおく．このとき，H_1 と同じく H_2 もソリッドトーラス，$f(H_2)$ も ソリッドトーラスである．また $H_1 \cap H_2 = \partial H_1 \cap \partial H_2$ はトーラス (円環面) であり，その f による像も，$f(H_1) \cap f(H_2) = \partial f(H_1) \cap \partial f(H_2) = F$ で，F はトーラスであって，$L(p,q) = f(S^3) = f(H_1) \cup f(H_2)$ と表される．

このように，閉 3 次元多様体 M が，同じ種数 g の ハンドル H_1 と H_2 の和で表され，$H_1 \cap H_2 = \partial H_1 \cap \partial H_2$ が 種数 g の向き付け可能な閉曲面 F となるとき，この H_1, H_2 を，M の種数 g の ヘゴール分解 (Heegaard splitting) という．レンズ空間 $L(p,q)$ は 種数 1 のヘゴール分解として表される．ヘゴール分解については，第 5 章において詳しく述べられる．

最後に 例として $L(7,1)$ と $L(7,2)$ のヘゴール分解を示して，この章を終わろう．ソリッドトーラス $H_1 = D^2 \times S^1$ を考え (上の $f(H_1)$ のこと)，また別の ソリッドトーラス H_2 を考える (上の $f(H_2)$)．このとき，$\partial H_2 = \partial D^2 \times S^1$ から ∂H_1 へ

の 同相写像 $f : \partial H_1 \to H_2$ によって，H_1 の境界と H_2 の境界を同一視した位相空間 (H_1 に f により H_2 を貼り付けた空間) を，

$$H_1 \bigcup_f H_2$$

と書く．これは 閉 3 次元多様体になることは容易にわかる．さて，同相写像 $f : \partial H_1 \to H_2$ は $\partial D^2 \times \{*\}$ ($*$ は S^1 の 1 点) の f による像が決まれば，つくられる多様体は一意に決まる (同相である) ことがわかっている．

よって，この像 ($\partial D^2 \times \{*\}$ の像) を描くことで，たとえば，$L(7,1)$, $L(7,2)$ のヘゴール分解を表すとつぎの図 2.5 のようになる．

これらが $L(7,1)$, $L(7,2)$ であることは，各自確かめてみてほしい．

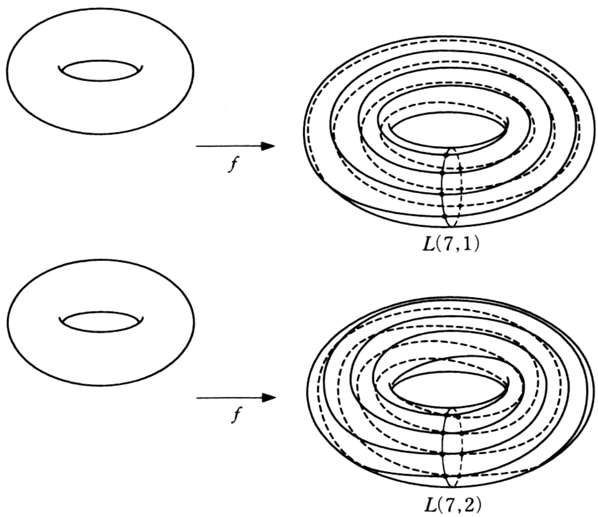


図 2.5 レンズ空間のヘゴール分解

参考文献

[1] 小松醇郎, 中岡 稔, 菅原正博:位相幾何学 I(現代数学シリーズ 6), 岩波書店 (1967)

[2] H. Seifert and W. Thrlefall: Lehrbuch der Topologie. CHELSEA Publishing Company, New York(1934)
[英語版] H. Seifert and W. Thrlefall: A Textbook of Topology. Academic Press, New York (1980)

[3] J. H. C. Whitehead: On the homotopy type of ANR's.Proc. Amer. Math. Soc., **16**, 559-566 (1965)

3

3 次元多様体についての基本予想

3次元幾何学的トポロジーとは

トポロジーは20世紀の数学の主役のひとつであったといえるだろう．基本的には幾何学的図形と同相写像を研究対象としている．その黎明期より多様体の組合せ構造に着目した研究がとくに3次元において盛んに行われた．現代語でいえば離散的取扱いとなるのだろう．本書の読者ならばすでによく知っている閉曲面の多角形標準形は典型的な例として挙げることができると思う．3次元閉多様体の分類定理ももちろん歴史に残ると考えている．3次元の離散構造を用いる研究者たちには直観主義への憧れも感じることができる．これは人間が物事をわかる，理解するというのはどのようなことなのかという問題まで明示的ではないが実は考えていることになっている．離散的取扱いによる議論，結論はおそらく数学の専門家を越えてわかったように思われる傾向が強いと感じている．人にはそれぞれ感性というものがあるようだから，こだわる必要は微塵もないが，補助線の麻薬的魅力に取り憑かれた人は多いのではだろうか? もしなんとなくであっても魅かれるところがあるならばそれが向いている証と考えて，新しい離散的手法を開発して難解な現象をやさしく解明しよう．目標の最低レベルはポアンカレ予想としよう．

この章では 3 次元多様体に関する基本予想とよばれていた問題について述べる．現在は解決済みであることを考えれば基本定理というべきかもしれないが基本予想のほうが通りがよいだろう．

【基本予想】 M_1, M_2 が同相な 3 次元 PL 多様体であれば，それらは PL 同相である．

3.1 状況の説明と概念の確認

3.1.1 状況の説明

少し状況の説明を加えておこう．

$h: M_1 \to M_2$ を同相写像としよう．M_i の三角形分割を T_i とする．図 3.1 のように T_2 と比較して $h(T_1)$ がどうなっているか考える．つまり，T_2 がまっすぐに

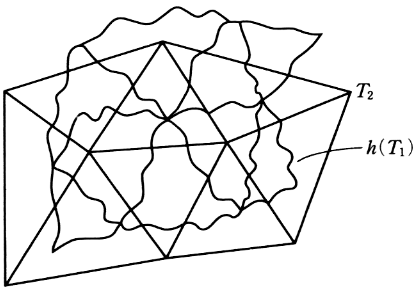


図 3.1 三角形分割のずれ

見える目で $h(T_1)$ を見ると，まっすぐな部分もあるかもしれないが，一般にひどく曲がって見えるであろう．もしも，その曲がった部分を，たとえば曲がった線を折れ線にするように直す M_2 の同相写像が見つかれば，T_1, T_2 を上手に細分して PL 同相写像をつくることができる，と考える．

3.1.2 概念の確認

単体的複体はすでに学んだ通りある種の条件を満たす単体の集まりとして抽象的に定義されており，単体的複体が与えられると各単体をそれが定める点集合（位相空間）とみなして自然に位相空間が定まることも知っている．これを逆に見て，その位相空間がそれらの単体に分けられていると考える．すなわち，幾何学的実体としての位相空間がいくつかの単体の和として表されていてその単体の集まりが単体的複体の条件を満たしている状態である．

【定義 3.1】　K が幾何学的 2 次元複体（以後，単に 2 次元複体という）であるとは，「K が三角形（2-単体と同相）の局所有限な集まりであり，かつ，どの 2 つの三角形も共有点をもつならば，その共通部分は双方の 1 頂点（0-単体），または 1 辺（1-単体と同相）である」を意味する．

***!* 注意 3.1**　2 次元複体の三角形は単体と同相だから，重心座標を用いた単体内の線形構造をその同相写像で継承していると考える．2 つの三角形が共通の辺で交わるならば，その辺上の線形構造は両方の三角形の線形構造から定まるものとして整合性を図る．この意味で三角形や辺のなかでは，“まっすぐ”という直観的な言葉を使うことができる．

【定義 3.2】　上記の三角形，辺，頂点の集まりを 2 次元複体 K の三角形分割という．

同様に，3 次元多様体に対して，その三角形分割なる概念を考える．M を与えられた 3 次元多様体とする．T が三角錐（3-単体と同相）の集まりであり，M を埋め尽くしているとする．この状況の下で，T が 2 次元複体と同様の条件，つまり，局所有限であり，かつ，2 つの三角錐の共通部分が空でないならば，それは共通の 1 頂点，共通の 1 辺，または共通の面（1 つの三角形）である，を満たしているとき，三角錐，その頂点，その辺，その面の集まりを M の三角形分割とよぼう．簡単のために，T を M の三角形分割という．三角錐の線形構造，2 つの三角錐の共通部分の線形構造についても，注意 3.1 と同様である．

三角形分割 T の頂点全体，辺全体，面全体をそれぞれ T の 0-スケルトン，1-スケルトン，2-スケルトンということにして，それぞれを，$T^{(0)}, T^{(1)}, T^{(2)}$ と表すことにする．

ここで，大きな問題が 2 つ発生している．

第 1 の問題　　3 次元多様体 M が三角形分割可能であったとするとき，M の三角形分割はいくつあるか？

この問題の“いくつ”を説明する．T_1, T_2 が M の三角形分割であるとき，T_1, T_2 の同型な細分の存在をもって，T_1, T_2 が同値であると定義する．この同値関係による同値類の個数を意味している．つまり，もしも T_1 と T_2 が同値ならば，M 上で T_2 から見ると T_1 の曲がり方は“折れ線”程度，つまり多面体的，に直せる．逆に，T_2 から見て T_1 の曲がり方が多面体的であれば第1章の凸胞体の分割手法を上手に使って T_1, T_2 が同値であるといえる．ここで，冒頭に述べた基本予想を思い出してみよう．すると基本予想は第1の問題と同じ状況にあることがすぐわかる．だから $h(T_1)$，ここでの h は恒等写像である，を多面体的に直したいのである．しかも直された結果が元の T_1 ときわめて近いことも望ましいので，もうひとつ，基本予想で求められているPL同相写像について少し述べる．もともとトポロジーは幾何学的図形と写像の学問であることを思い起こそう．写像全体を考えると，与えられた同相写像と求めるべきPL同相写像はある意味で“似ている”あるいは“近い”ことが望ましい．つまり，写像としていわば同じ“組”に属していていっそう扱いやすい情報をもつものが見つかることを期待したい．これが近似の思想であろう．幸運なことに，基本予想は近似定理の形で解決されている．写像の言葉でいえば，同相写像はPL同相写像で近似できる，となる．証明に用いられる手法は，まず $T^{(2)} - T^{(1)}$ の各成分，つぎに $T^{(1)} - T^{(0)}$ の成分，最後に $T^{(0)}$ の順で多面体的に近似していく．自然で地道な方法といえるが，議論はやさしくない．

基本予想が証明されると第1の問題の“いくつ”は“1つ”となる．このとき，M の組合せ構造，またはPL構造は一意的であるなどといわれる．

第2の問題　　どんな3次元多様体に三角形分割があるのか？

3次元に限らず多様体は局所的にはユークリッド空間という特徴をもっている．ユークリッド空間は上の意味で三角形分割が可能である．もしも，3次元多様体が三角形分割できるならば，それは複体として組合せ的な認識の対象になり，離散的な議論が可能となる．実際，そのお陰でさまざまな現象が明快に解明されている事実は否定できない．一方，もしも，三角形分割不可能な3次元多様体があれば，それ（ら）はどのような多様体であるかという興味が生ずる．上の問題は多様体に“三角形分割”というある種の構造的なユークリッド的都合良さを要求してそれですべてがカバーできると期待している，もしかしたら虫のよすぎる願望であるかもしれない．これに警告を発するとともにいっそう深い認識への扉を開くこ

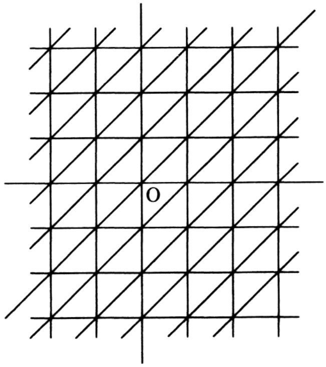


図 3.2　平面の三角形分割

とになる．

ユークリッド空間は三角形分割可能である，しかもその各単体はまっすぐに見える，これは事実として認めよう (図 3.2)．実際つくって見せることも難しい話ではない．すると，多様体は局所的には三角形分割が可能である．つまり，多様体 M の任意の点 p の近傍としてユークリッド空間と同相なものとして $U(p)$ を選ぶと，その三角形分割 $T(U(p))$ が存在する．

ここで，p を動かして $T(U(p))$ 全体を $T(M)$ とすれば，M の三角形分割 $T(M)$ が得られると考えたいが，それは早計である．しかし，そのアイディア自体は単純だがむしろ自然であって捨て難いものがある．こだわって，どこが早計であるかを分析しよう．

M の異なる 2 点 p, q の近傍 $U(p), U(q)$ を考え，$U = U(p) \cup U(q)$ とおく．ここで，$U(p), U(q)$ それぞれの三角形分割 $T(U(p)), T(U(q))$ をもとにしてどのようにして U の三角形分割 $T(U)$ をつくるかを考える．

(1)　$U(p) \cap U(q) = \emptyset$ であれば，$T(U(p))$ の単体と $T(U(q))$ の単体は共通部分をもたないわけだから $T(U) = T(U(p)) \cup T(U(q))$ とすれば，$T(U)$ は自動的に複体の条件を満たす単体の集合になる．つまり，この場合は不都合は生じそうにない．

(2)　したがって，問題は，$V=U(p)\cap U(q)$ が空でない開集合の場合に $T(U(p))$ と $T(U(q))$ から U の三角形分割 $T(U)$ をつくれるか否か，となる．

問題を明確にするためにさらに (2) の状況分析を続ける．

$T(U)=T(U(p))\cup T(U(q))$ としたら何か不都合が起こるのであろうか？ もしも $T(U)$ が U の三角形分割を与えているのならば $T(U(p))$ の三角錐も $T(U(q))$ の三角錐も U でまっすぐな三角錐に見えるはずであることを注意しておく．

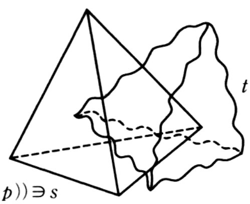


図 3.3　三角錐のずれ，ゆがみ

まず，V に含まれる $T(U(p))$ の要素 s はまっすぐに見えていると考える（図 3.3）．つまり，s は $U(p)$ では普通に描かれた三角錐と思える．一方，V には $T(U(q))$ の三角錐 t も含まれているであろう．ここで，s がまっすぐに見えるという条件を忘れずに，t がどのように見えるか考える．もともと $T(U(p)),T(U(q))$ はどちらも相手との関係は考えずにつくられているものであるから，s,t が同時にまっすぐ見えるという保証はない．つまり，s をまっすぐ見る目で t を見れば曲がって見える，と考えるところから始めなければならない．これを $T(U(p)),T(U(q))$ の線形構造の違いなどという．したがって単純に $T(U)=T(U(p))\cup T(U(q))$ とするわけにいかないことがわかる．$T(U(q))$ そのものは使えないのでその代用物をつくる工夫をしなくてはならない．材料は t しか与えられていない．t が曲がって見える見え方にも，ギザギザ，グニャグニャなどいろいろあるだろう．

勘のよい読者はすでに見抜いているだろうが，基本予想の解決に使われる手法は第2の問題にも有効であって，この章を読み終わると，すべての3次元多様体は一意的な組合せ構造をもっていることが理解されると期待できる．ついでに述べておくと，3次元多様体が三角形分割をもてばそれは組合せ多様体である．すると

2 次元多様体の分類定理を知る者にとっては，同様に 3 次元多様体の分類が 1 つの素朴な夢となる．つまり，3 次元多様体のリストをつくり，与えられた多様体がそのリストのどれであるかを決定する手続きを開発することである．基本群で足りる部分もあるが足りない部分もある．有名なポアンカレ予想はいまだ何ともいえず微妙なところである．最後の章まで読んでほしい．新しいアイディアが公開される．

第 1，第 2 の問題の最初の解決はモイズ(E.Moise) によって 1952 年にもたらされた．連作でもあり，内容的にも難しい．そこで 1959 年に発表されたビング(R.H.Bing) による論文 [1]，をおもな材料として肝腎な部分をおおらかに述べることにする．ここで展開される議論は洗練された当世風のものではないが，かえって新鮮さを感じる向きもあろう．温故知新．基本予想，三角形分割可能性はとくに意識されない時代になっているが，3 次元トポロジーの根幹をなす定理であるので強く認識しておかねばならない．同時に，つぎの点にも留意されたい．第 1 章では抽象的，あるいは形式的な議論も多かったが，それは数学の宿命として，それらと幾何学的実体との関係はとくに 3 次元の幾何学的トポロジーでは重要である．その直観性を養い，磨くことがこれからの各章を読み進むにあたっても肝要である．

3.2　2 次元複体の近似定理 1

2 次元複体 C，その三角形分割 $T(C)$ を考える．C が 3 次元ユークリッド空間 R^3 に同相写像 h で埋め込まれてるとしよう．近似定理の目的は，h を上手に h' に変えて $h'(C)$ が局所多面体的になるようにすることである．“局所多面体的” の定義は少し後で述べる．

以下，一般的な補題も含めてつぎの節で述べる定理 3.16 の証明のために一連の補題を述べる．

【補題 3.3】 D を R^2 上の多面体的ディスクとすると，R^2 上の PL 同相写像 h で $h(D)$ が 1 つの 2-単体になるものが存在する．

証明　D は多面体的であるので，D を 2-単体 $s_i, i=1,\cdots,n$ の和集合であると考える．もし $n=1$ となっているならば h は恒等写像でよい．だから，以後 $n \geq 2$

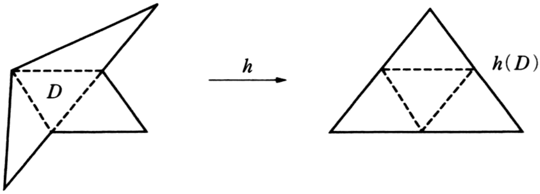


図 3.4　同相写像 h

の場合を扱う．このとき上手に番号を付ければ $\bigcup_{i=1}^{n-1} s_i = D'$ がふたたびディスクになるようにできる．$D' \cap s_n$ が s_n の1辺であるか2辺であるかによって場合を分ける．

場合1　s_n の頂点を a, b, c とおいて，$D' \cap s_n$ が s_n の1辺 ac であるとする．辺 ac の中点を y とおく．線分 by を少し延ばして y の外側に点 x，b の外側に点 z をとる．つまり，4辺形 $axcz$ と D の共通部分は4辺形 $axcb$ となっている．ここで，R^2 の PL 同相写像 h_n を以下のとおり決める．

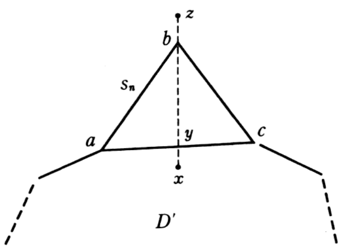


図 3.5　場合1

(1) h_n は4辺形 $axcz$ の外では恒等写像，

(2) $h_n(b) = y$,

(3) $h_n(\triangle axb) = \triangle axy$, $h_n(\triangle abz) = \triangle ayz$, $h_n(\triangle bxc) = \triangle yxc$, $h_n(\triangle bcz) = \triangle ycz$.

すると当然 $h_n(D) = D'$ となっている．帰納法の仮定を用いれば，D' を 1 つの単体に写す R^2 の PL 同相写像 h' の存在が保証される．求める PL 同相写像 h は $h = h'h_n$ として得られる．

場合 2　$D' \cap s_n$ が s_n の 2 辺のとき．場合 1 の動かし方をいわば "逆向き" にすればよい．記述上，気を使うところはあるにしても，本質的には場合 1 と同じであるから省略する．■

この証明を応用すればつぎの系が得られる．

【系 3.4】　D_1, D_2 がともに R^3 内の 3-単体の境界 S^2 に含まれる多面体的ディスクならば，S^2 から S^2 への PL 同相写像で D_1 を D_2 へ写せる．

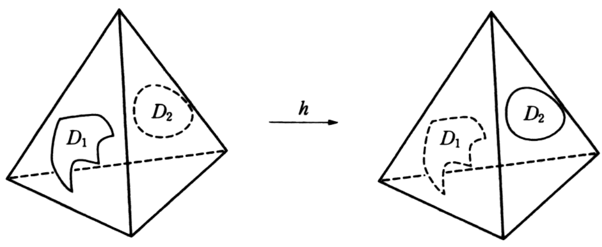


図 3.6　系 3.4 の図

【補題 3.5】　D を R^3 の多面体的円板とする．このとき，R^3 の PL 同相写像で D を平面上に写すことができる．

証明　補題 3.3 の証明と同様に D を単体 $s_i, i = 1, \cdots, n$ の和集合として表し，記号も共通にしておく．場合分けも同じにする．今回は，D を D' に写す R^3 の PL 同相写像をつくるのが目的である．

場合 1　$D' \cap s_n$ が s_n の 1 辺 ac であるとする．辺 ac を共有するもうひとつの単体の第 3 の頂点を d とし，今回 x は線分 dy の中点としよう．z としては線分 yb

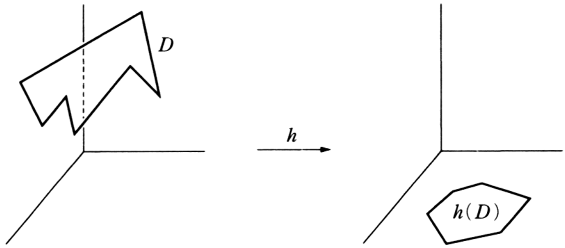


図 3.7　補題 3.5 の図

を b のほうに少し延ばして $\triangle azc \cap D = s_n$ となるように選んでおく．つぎに，辺 ac の近くで D から少し離れた2点 p_1, p_2 を以下の通り選ぶことができる．

(1) 線分 p_1p_2 と D の共通部分は y であり，y で D を突き抜けている，

(2) 三角錐 $p_iacd \cap D = \triangle acd$, $i = 1, 2$,

三角錐 $p_iacz \cap D = \triangle abc$, $i = 1, 2$.

後は補題 3.3 の証明と同様に，4つの三角錐の外側では恒等写像になるように求める PL 同相写像が得られる．

場合 2　$D' \cap s_n$ が s_n の2辺であるとき．s_n の頂点のうち b が D の内点であるとして，V は b を頂点とする単体全体の定めるディスクとしよう．つまり，$V = \mathrm{St}(b, D)$．V は R^3 の中で1枚の平面上にあるとは限らない．

段階 1　まず，R^3 の PL 同相写像で V を平面上に写すことを考える．b を内点として含む小さな三角錐を1つ選び W とおく．R^3 の PL 同相写像 h_1 を $h_1(V) = V \cap W$ を満たすようにとる．$V \cap \partial(W) = J_1$ が W の境界 $\partial(W)$ 上で多面体的ディスクの境界になっていることに注意しておこう．一方，b を通る1つの平面 P を考えると，$P \cap \partial(W) = J_2$ も同様に $\partial(W)$ 上で多面体的ディスクの境界になっている．したがって，$\partial(W)$ の PL 同相写像で J_1 を J_2 に写すことができる．この PL 同相写像を b からのジョイン構造を用いて R^3 の PL 同相写像 h_2 に拡張する．ここで，$h_2h_1(V) \subset P$ となった．

段階 2　$h_3 = h_2h_1$ とおく．ここで，補題 3.3 の証明中の場合2と同じようにすれば，P の PL 同相写像 h_4 を条件 $h_4(h_3(V)) = h_3(V \cap D')$ を満たすようにとれ

る．上の場合 1 と同様に 2 点 p_1, p_2 を上手に選べば h_4 を R_3 の PL 同相写像に拡張できる．これを h_5 としよう．R^3 の PL 同相写像 $h_6 = h_3^{-1}h_5h_3$ を考えると，$h_6(D) = D'$ となっている． ■

【系 3.6】 D_1, D_2 がともに R^3 内の多面体的ディスクで，R^3 内の多面体的球面 S^2 に含まれているとする．このとき，PL 同相写像 $h : R^3 \to R^3$ でつぎの条件を満たすものがとれる．

(1)　$h(S^2) = S^2$,

(2)　$h(D_1) = D_2$.

証明　$S^2 \neq D_1 \cup D_2$ のときと $S^2 = D_1 \cup D_2$ のときに分けて証明する．

場合 1　$S^2 \neq D_1 \cup D_2$ とすると，S^2 内に $D_1 \cup D_2 \subset \mathrm{Int}(D)$ を満たす多面体的ディスク D がとれる．補題 3.5 によれば，D を平面 P 上にのせる R^3 の PL 同相写像 h_1 がある．$h_1(D_1), h_1(D_2)$ は平面上の 2 枚の多面体的ディスクだから，R^3 の PL 同相写像 h_2 がつぎの条件を満たすようにとれる．

(1) $h_2(P) = P$,

(2) $h_2(h_1(D_1)) = h_1(D_2)$,

(3) $h_2|h_1(S^2 - \mathrm{Int}(D)) = \mathrm{id}$.

ここで，$h = h_1^{-1}h_2h_1$ とすれば求める PL 同相写像が得られる．

場合 2　$S^2 = D_1 \cup D_2$ のとき．今回は，S 上の多面体的ディスク D を小さくとって，$S^2 \neq D \cup D_i, i = 1, 2$ となるようにしておく．すると，場合 1 を使える状態になる． ■

【定義 3.7】 有限個の三角錐の内点の和で表される R^3 の開集合を**有界多面体的開集合**という．

【補題 3.8】 D_0, D_1, D_2 は R^3 内の多面体的ディスクでつぎの条件を満たしているとする．

(1)　$\partial(D_1) = \partial(D_2)$,

(2)　$D_1 \cap D_2 = D_0 \cup \partial(D_1)$,

(3)　$\partial(D_0) \cap \partial(D_1)$ は1点または1本の弧である.

このとき, $D_0 - \partial(D_1)$ を含む有界多面体的開集合 U をどう選んでも, $D_2 \cup U$ のなかに

$$D_1 \cap D'_2 = \partial(D_1) = \partial(D'_2)$$

を満たす多面体的ディスク D'_2 がとれる.

証明　補題3.3および3.5によって, D_1 はある平面上にあり, D_0 は3点 a, b, c を頂点とする三角形であるとして一般性を失うことはない.

場合1　$D_0 \cap \partial(D_1)$ が1点 (c としよう) の場合. y は D_0 の内点として, a, b の近くの点 a', b' と y の近くの2点 p_1, p_2 をつぎの条件を満たすように選ぶことができる. このとき, U が有界多面体的であるという条件に注意しよう.

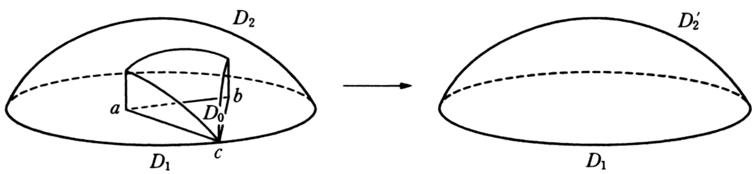


図 3.8　場合1の状況

(1) $D_0 - c \subset \mathrm{Int}(\triangle a'b'c)$,

(2) $\triangle a'b'c - c \subset \mathrm{Int}(D_1) \cap U$,

(3) p_1p_2 は y で D_0 を突き抜ける短い線分である,

(4) $X = \bigcup_{i=1}^{2} p_i a'b'c$ とおくと, $X - c \subset U$,

(5) $\partial(X) \cap D_2$ は1本の単純閉曲線 L である.

L は c 以外には D_1 と交わらない $\partial(X)$ 上の多面体的ディスク D' の境界になっている. ここで, $D'_2 = (D_2 - (X \cap D_2)) \cup D'$ とすれば求める多面体的ディスクが得られる.

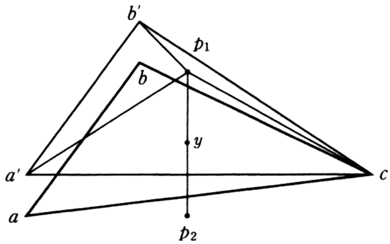


図 3.9　場合1の工夫

場合 2　$D_0 \cap \partial(D_1)$ が1本の弧のとき．場合1と同様の手法でもっと簡単であるから省略する．■

ここで，扱うべき対象を明確にするために少々微妙な定義をする．

【**定義 3.9**】 R^3 内の閉集合 X が点 $x (\in X)$ で**局所多面体的**であるとは，x の近傍 N が存在して，$\mathrm{cl}\,(N) \cap X$ が有限多面体となっていることをいう．

【**定義 3.10**】 R^3 内の閉集合 X が，$x_1, \cdots, x_n (\in X)$ を**除いて局所多面体的**であるとは，$X - \{x_1, \cdots, x_n\}$ の任意の点 x で局所多面体的であることをいう．

局所多面体的であるという状況はいかにも都合がよさそうであるし，このようにしたい．それが十分であることはやはりビングによって証明されている．すると，不都合な部分，つまり局所多面体的でない点（集合），の近くを切り取って捨て，多面体によって替えることを考える．そこで，局所多面体的では“ない”という状況を把握しておく必要がある．典型的な例を図3.10に示しておく．

このように局所多面体的でない点は連続的に現れることもあるし，その場合ももちろん処理しなければならない．しかし，本書ではその最終段階までは述べない．むしろ，幾何学的トポロジーにおける基本的手法である，いわゆる“切り貼り細工”，つまり，不都合な部分を切りとって都合の良いものに取り替える手法，を強調しながら，直観を磨くことに資したい．

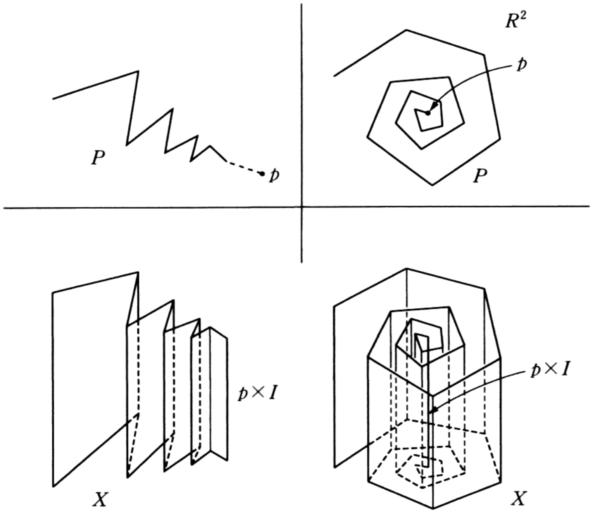


図 3.10　この2つの例はいずれも点 p で局所多面体的でない．ここで，$X = P \times I$ とおくと，X は R^3 内の位相的ディスクであって，$p \times I$ の点では局所多面体的でない．

【定義 3.11】　R^3 内の開集合 U が有限個の点 $q_1, \cdots, q_n$ を除いて**局所多面体的**であるとは $\mathrm{cl}\,(U) - \bigcup_{i=1}^{n} q_i$ の任意の点 p に対して p の近傍 N が存在して $N \cap U$ が有界多面体的開集合，つまり有限個の三角錐の内点の和となることをいう．

【補題 3.12】　D を R^3 内の位相的ディスクで境界上の n 個の点 $q_1, \cdots, q_n$ を除いて局所多面体的であるとする．U は $\mathrm{Int}\,(D)$ を含む開集合で $q_1, \cdots, q_n$ を除いて局所多面体的であるとする．このとき，R^3 内につぎの条件を満たす位相的球面 S が存在する．

(1)　$S \cap D = \partial(D)$,

(2)　D の内点は $R^3 - S$ の連結成分のうち有界な方に含まれる，

(3)　$S \subset U \cup \partial(D)$,

(4)　S は $q_1, \cdots, q_n$ を除いて局所多面体的である．

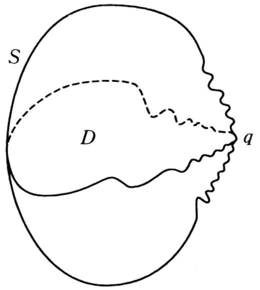


図 3.11　補題 3.12 の状況

証明　まず，D に含まれる多面体的ディスク $E_1, E_2, \cdots$ を以下の条件を満たすようにとる（図 3.12）.

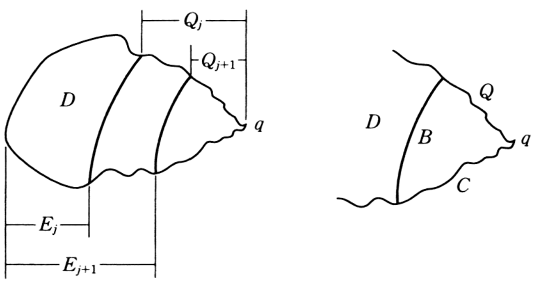


図 3.12　条件の図示

(1) $\bigcup E_j = D - \bigcup_{i=1}^{n} q_i$,

(2) $E_j \subset \mathrm{Int}(E_{j+1}) \cup \partial(D)$,

(3) $D - E_j$ は $q_1, q_2, \cdots, q_n$ を含む n 個の連結成分 $Q_{j1}, Q_{j2}, \cdots, Q_{jn}$ の和である,

(4) $\mathrm{cl}(Q_{ji})$ は直径が $\dfrac{1}{j}$ より小さいディスクである,

(5) $\partial(\mathrm{cl}(Q_{ji}))$ は境界を共有する 2 本の弧 B,C に分けられて $B \subset \partial(D)$ かつ $\mathrm{Int}(C) \subset \mathrm{Int}(D)$ である．

本質的ではなく記述上の都合で，$j=2$ から始める．ここで補題 3.3 および 3.5 を用いると，E_2 はある平面内の三角形 abc とみなしてよい．y を $\triangle abc$ の内点にとり，いつもの通り p_1,p_2 を線分 p_1p_2 が y で $\triangle abc$ を突き抜けていて，$X = \bigcup_{i=1}^{2}$（三角錐 p_iabc）とおくとき，$X \subset U \cup \partial(E_2)$ かつ $X \cap D = \triangle abc$ となるように選んでおく．ここで $S_2 = \partial(X)$ とすれば S_2 は多面体的球面であって，E_2 を D，S_2 を S と読み替えると求める条件を満たしている．

$j \geq 3$ と考えて，E_j に対して S_2 のような S_j をつくることを考えよう．$E_j - E_{j-2}$ の多面体的近傍 U_j を U の中でつぎの条件を満たすようにとる．

(6) U_j は n 個の成分をもち，そのどれも直径が $\dfrac{1}{j-2}$ より小さい，

(7) $U_j \cap (D - E_j) = \emptyset$.

帰納的に S_j を構成するので，具体的に S_2 から S_3 のつくり方を述べれば十分である．$S_2 - \partial(E_2)$ の 1 つの連結成分の閉包 D' を考える．補題 3.8 を睨みながら，$D_0 = \mathrm{cl}(E_3 - E_2)$ の 1 つの成分とおき，$D_1 = E_2 \cup D_0, D_2$ として $D' \cup D_0$ をとると，補題 3.8 の結論にある多面体的ディスク D_2' が得られる．これを n 回，つまり $\mathrm{cl}(E_3 - E_2)$ の連結成分数，繰り返した結果の多面体的ディスクも D_2' で表すことにしよう．$S_2 - \partial(E_2)$ のもうひとつの連結成分について同じ議論をして多面体的ディスク D_2'' を得る．ここで $S_3 = D_2' \cup D_2''$ とすれば求める多面体的球面が得られる．これで各 j について多面体的球面 S_j が得られたとして，$S = \lim_{j\to\infty} S_j$ とおけば，U_j の直径が順に小さくなるようにしてあるので求める球面になっている．■

【補題 3.13】 ab は R^3 内の 2 点 a,b を結ぶ弧であるとする．D_1, D_2 は R^3 内の位相的ディスクでつぎの条件を満たすとする．

(1) $D_1 \cap \partial(D_2) = D_2 \cap \partial(D_1) = ab$,

(2) D_1, D_2 はともに a,b を除いて局所多面体的である，

さらに，U は R^3 内の開集合でつぎの条件を満たすとする．

(3)　U は $\mathrm{Int}(D_1)$ を含む，

(4)　U は a, b を除いて局所多面体的である．

このとき，$D_2 \cup U$ の中に以下の条件を満たす位相的ディスク D_2' がとれる．

(5)　$\partial(D_2') = \partial(D_2)$,

(6)　$D_1 \cap D_2' = ab$,

(7)　D_2' は a, b を除いて局所多面体的である．

さらに，もしも D_1, D_2, U がすべて a で局所多面体的であれば D_2' もそのようにとれる．

証明　補題 3.12 を用いるとつぎの条件を満たす球面 S の存在が保証される．

(1) $S \subset U \cup \partial(D_1)$,

(2) $\partial(D_1) \subset S$,

(3) $\mathrm{Int}(D_1)$ と $\partial(D_2) - ab$ はそれぞれ $R^3 - S$ の有界成分と非有界成分に含まれる，

(4) S は a, b を除いて局所多面体的である．

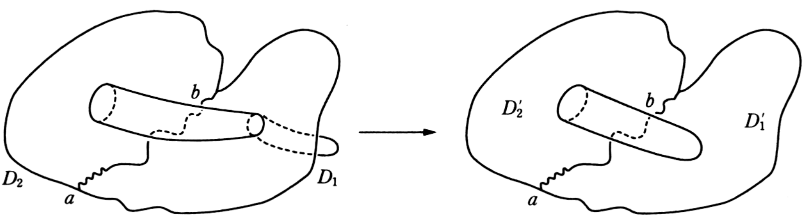


図 3.13　切り貼り

さらに，S を少し直してつぎのようにしておく．

(5) $S \cap (D_2 - ab)$ の各成分は ab 上に両端点をもつ弧であるかまたは ab とたかだか 1 点を共有する単純閉曲線である．

すると，D_2, S ともに a, b を除いて局所多面体的であるので，任意の正数 ε に対して，$S \cap (D_2 - ab)$ の各成分のうち，$a \cup b$ の ε 近傍に含まれないものは有限個である．E を $D_2 - S$ の連結成分で $\partial(D_2) - ab$ を含むものとして，$D_2 - \mathrm{cl}(E)$ の各成分の閉包 E_i を考えよう．E_i はディスクであって，つぎのように順序を付けることができる．

(6) $\partial(E_{i+1})$ は S 上で $\partial(E_i)$ の点と $\partial(D_1)$ の点を分離しない．

ここで，一般性をもつ方法で，具体的に E_1 から新しいディスク E_1 をつくる．$\partial(E_1)$ は S 上で2つのディスクの境界になっている．そのうちの Int $(\partial(D) - ab)$ を含まないほうを E_1'' として選ぶ．E_1 に対して補題 3.12 を使うと，つぎのようなディスク E_1' が得られる．

(7) $\partial(E_1') = \partial(E_1)$,

(8) E_1' は a, b を除いて局所多面体的，

(9) $\mathrm{Int}(E_1')$ は $R^3 - S$ の有界領域に含まれる，

(10) $\mathrm{Int}(E_1') \cap \mathrm{Int}(D_1) = \emptyset$,

(11) E_1' は E_1'' から距離1以内にある．

一般的には (10), (11) がつぎのようになる．

(10)$'$ $\mathrm{Int}(E_i') \cap \mathrm{Int}(D_1) \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathrm{Int}(E_j') = \emptyset$,

(11)$'$ E_i' は E_i'' から距離 $\dfrac{1}{i}$ 以内にある．

ここで，$D_2' = (D_2 - \bigcup E_i) \cup \bigcup E_i$ とおけばよい．■

3.3　2次元複体の近似定理 2

2次元複体 C，その三角形分割 $T(C)$ を考える．C が3次元ユークリッド空間 R^3 に同相写像 h で埋め込まれているとしよう．ここでの目的は，h を上手に h' に変えて $h'(C)$ が局所多面体的になるようにすることである．

この節で述べる定理 3.15 は，$T(C)$ の開 2-単体を s とおいて，$h(s)$ が局所多面体的になるように，h を調整できることを主張するものである．さらに，定理 3.17 では，引続き，$T(C)$ の開 1-単体上でも局所多面体的に直す．$T(C)$ の頂点上で局所多面体的に直せることを保証するのが定理 3.19 である．これらの定理をまとめて目的，定理 3.20（近似定理）を達成する．

【定義 3.14】
$$R_{\geq 0} = \{x|x \in R \text{ かつ } x \geq 0\},$$
$$R_{>0} = R_{\geq 0} - \{0\}$$
なる記号を用いる．

【定理 3.15】 D を R^3 の（位相的）球面内のディスクとし，$f : \mathrm{Int}(D) \to R_{>0}$ は連続関数であるとする．このとき，つぎの条件を満たす R^3 内のディスク D' と同相写像 $h : D \to D'$ が存在する．

条件：(1)　$\partial(D') = \partial(D)$,

(2)　任意の $x \in D$ に対して，x と $h(x)$ の距離は $f(x)$ を超えない，

(3)　D' はその内点ともともとそうであった境界上の点で局所多面体的である，

(4)　D の閉部分集合 K で局所多面体的であったならば，h は K を固定するように選べる．

この定理 3.15 については後の節で解説することにして，この節では定理 3.15 を用いて議論を進める．もちろん，循環論法にはしない．

なお，以下の定理では仮定に述べられているディスクはみなある球面に含まれていると考えることにする．つまり，3 次元多様体の三角形分割の 2-単体（の像）などを想定すればよい．

【定理 3.16】 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ は R^3 の位相的ディスクであり，どの 2 つのディスクも共通部分は双方の境界に含まれる弧 ab であったとする．このとき，各ディスクが ab を除いて局所多面体的であるならば，$\mathrm{Int}(ab)$ を含む開集合 U をど

のように選んでも，D_1 上の弧 axb と 位相的ディスク $D'_1, D'_2, \cdots, D'_n$ がつぎの条件を満たすようにとれる．

条件：(1)　$\partial(D'_i) = (\partial(D_i) - ab) \cup axb$,

(2)　$D'_i - U = D_i - U$,

(3)　$D'_i \cap D'_j = axb$,

(4)　D'_i は2点 a, b を除いて局所多面体的である，

(5)　D_i が a または b で局所多面体的であったならば，D'_i もそのようにとれる，

(6)　$D_1 \cup D_2$ が $\mathrm{Int}(ab)$ を除いてもともと局所多面体的であるならば，$D_1 \cup D_2 = D'_1 \cup D'_2$ となるように D'_1, D'_2 をとれる．

定理 3.2 の証明　D_i は a, b を除いて U に含まれていると考えてよい．いま，D_1 内の点 x を通って a と b を $\mathrm{Int}(D_1) \cup \{a, b\}$ の中で結び，かつ，a, b を除いて局所多面体的である弧を axb とする．弧 axb は D_1 を2つのディスク D_0, D'_1 に分けている．ここで，$\partial(D_0) = ab \cup axb$ として，$E_i = D_i \cup D_0, i \geq 2$ とおく．定理 3.15 によれば，$U \cup \partial(E_i)$ のなかにディスク E'_i をつぎの条件を満たすようにとれる．

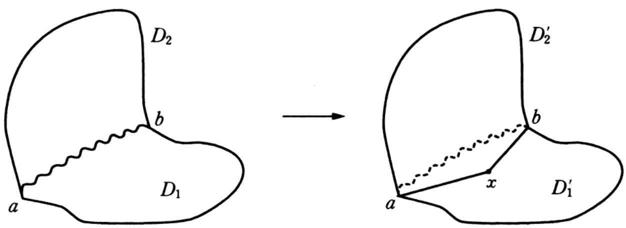


図 3.14　弧 axb

(1) $\partial(E_i) = \partial(E'_1)$,

(2) $E'_i \cap D_1 = axb$,

(3) a, b を除いて E'_i は局所多面体的である．

もしも $D_1 \cup D_2$ が a, b を除いて局所多面体的であるならば，E_2' は $D_2 \cup D_0$ とする．ともかく，D_2' として E_2' を採用する．ここで以下の条件を満たす U の開部分集合 U_3 を考える．

(4) $U_3 \cap D_1' = \emptyset$,

(5) $U_3 \supset \mathrm{Int}(D_2')$,

(6) U_3 は a, b を除いて局所多面体的である．

すると，補題 3.13 を用いて E_3' を変形すれば，D_3' が得られる．D_4' をつくるにあたっては，すでにある D_2', D_3' との共通部分に気を付けなければいけないが，U_4 を $D_1' \cup D_2'$ と交わらないようにとればよい．以下，順次，求めるディスクをつくれる．

【定理 3.17】 ab は R^3 内の点 a, b を結ぶ弧である．R^3 内の位相的ディスク $D_1, D_2, \cdots, D_n$ はつぎの条件を満たしているとする．

(1)　異なるディスク D_i, D_j に対して

$$D_i \cap D_j = \partial(D_i) \cap \partial(D_j) = ab,$$

(2)　どのディスク D_i も ab を除いて局所多面体的である，

さらに，$f : \bigcup_{i=1}^{n} D_i \to R_{\geq 0}$ は連続関数で $f(\mathrm{Int}(ab)) \subset R_{>0}$ と仮定する．このとき，つぎの条件を満たす埋め込み $h : \bigcup_{i=1}^{n} D_i \to R^3$ が存在する．

(3)　$d(x, h(x)) \leq f(x)$,

(4)　$h(a) = a, h(b) = b$,

(5)　どの $h(D_i)$ も a, b を除いて局所多面体的である，

(6)　もしも $D_i \cup D_j$ がもともと局所多面体的であるならば

$$h(D_i \cup D_j) = D_i \cup D_j$$

となるように h をとれる，

(7) もしも K がどの D_i もそこでは局所多面体的であるような閉集合であるならば，h は K 上で恒等写像であるようにとれる．

証明　$f(a)=0=f(b)$ として一般性を失うことはない．つぎの条件を満たす点列 $a_1, a_2, \cdots, an, \cdots$ を考える．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,

(2) どの a_n も ab 上にあって，a_{n+1} は a_n より a に近い，

(3) $a_n a_{n+1}$ の直径は $f(a_n a_{n+1})$ の最小値の $\dfrac{1}{4}$ 以下である．

つぎに Int $(a_{2n-1}a_{2n})$ を含む互いに交わらない開集合の列 $U_1, U_2, \cdots U_n, \cdots$ で，かつ U_n の直径は $f(U_n)$ の下限の $\dfrac{1}{4}$ 以下であるものを考える．$\lim_{n\to\infty}$ （U_n の直径）$=0$ に注意しておく．ここで定理3.16を用いれば，新しい D_n が得られるが，このときこれらの円板は $ba_1 \cup \bigcup_n a_{2n}a_{2n+1} \cup a$ を除いて局所多面体的であり，かつ，どの点 x も $\dfrac{1}{4}f(x)$ 以上は動いていない．番号をずらして同じことをすると，$ba_1 \cup a$ を除いて局所多面体的なさらに新しいディスクがつくれる．ここで，x は最初から見て $\dfrac{1}{2}f(x)$ 以上は動いていない．残りの ba_1 の部分を処理するには，b に収束する点列をつくって同じことを考えればよい．■

【定義 3.18】　a, b, c をディスク D の境界 $\partial(D)$ の3点とするとき，D を abc で表し，ab, ac, bc は $\partial(D)$ 上の内点を共有しない3本の弧であり，各弧の端点はそれぞれ a と b，a と c，b と c であるとする．

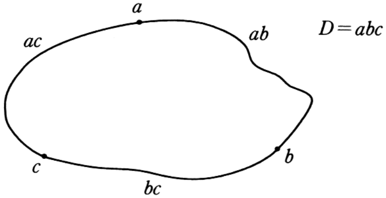


図 3.15　ディスクの記法

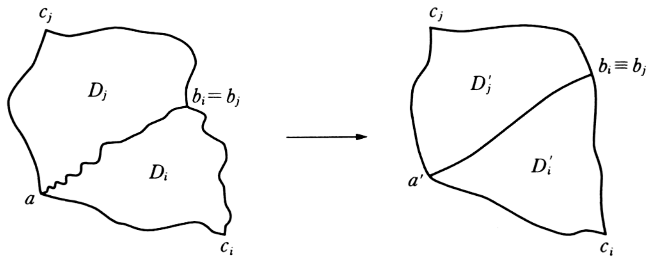


図 3.16

【定理 3.19】　$D_1, D_2, \cdots, D_n$ は R^3 内の位相的ディスクで各 D_i は ab_ic_i と表され，つぎの条件を満たしているとする．

(1)　どの D_i も a を除いて局所多面体的である，

(2)　$D_i \cap D_j$ は a または ab_i, ac_i のうちの 1 本の弧である，

このとき，a のどんな近傍 U を選んでも多面体的ディスク $D_i' = a'b_ic_i$ がつぎの条件を満たすようにとれる．

(3)　$D_i' \cup U = D_i \cup U$,

(4)　$D_i' \cap D_j$ は a' または $a'b_i, a'c_i$ のうちの 1 本の弧である，

(5)　もしも $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$，つまり部分的に，がすでに多面体的ディスクであり，a を内点として含んでいるならば $\bigcup_{i=1}^m D_i' = \bigcup_{i=1}^m D_i$ となるようにできる．

証明　まず，$U \cap \bigcup b_ic_i = \emptyset$ としてよい．$D_i - U$ は連結であるとする．U に含まれ，a を内点として含む球 C をとる．

場合 1　ここでの仮定はつぎの通りである．

仮定：$D_i \cap \partial(C)$ は ab_i から ac_i にわたる有限個の弧である．

この仮定に述べられている弧のうち D_i 上で a からもっとも遠いものを選んで $b_i'c_i'$ とおく．$D \cap C$ は多面体的ディスクであるから，C はそれによって 2 つの球

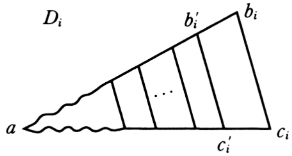


図 3.17

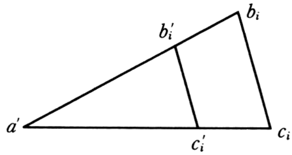


図 3.18

C_1, C_2 に分けられている．$i \geq m+1$ のときをまず考える．弧 $b_i'c_i'$ が C_1 内にあるならば，点 a' を C_1 内の $D \cap C$ の内点として，ディスク $ab_i'c_i'$ を錐状のディスク $a'b_i'c_i'$ に置き換えると考える．C_2 内でも同じことをする．$i \leq m$ に対しては，やはり錐状に a から $D \cap C$ を再分割すればよい．

場合 2　上記の場合に帰着できるように，C を上手にとれることを示すのが目的である．一般に，C はいろいろとれるだろうから，各 C について，$D_i \cap \partial(C)$ の成分数の総和を $N(C)$ とおいて，$N(C)$ が最小であるものを改めて C とする．この C が求める球 C であることを示す．

2-1　ここでは，$D_i \cap \partial(C)$ が円周を含まないことを主張する．対偶を考えよう．つまり，D_i の内部にディスク E があって，$\partial(E)$ が問題の円周であるとする．すると，C を E の近くで押し込むか，膨らませるかして新しい球 C' をつくれば，$\partial(E)$ はもはや $\partial(C')$ とは交わらない（図 3.19）．すなわち，$N(C') < N(C)$ となって，矛盾が生ずる．

2-2　最後に，$D_i \cap \partial(C)$ の成分は ab_i から ac_i へわたる弧のみであることを示そ

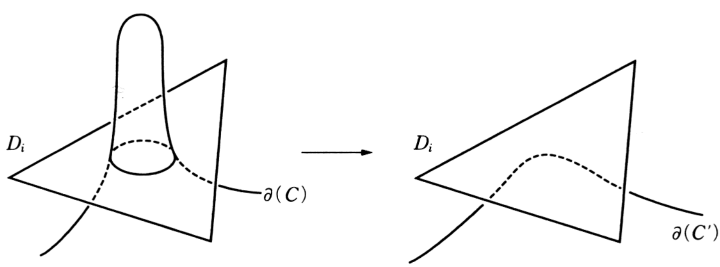


図 3.19　外す

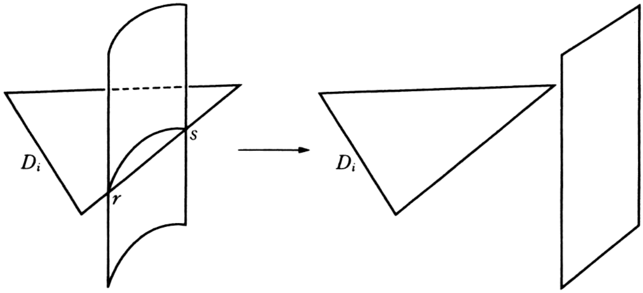


図 3.20　外す

う．$D_i \cap \partial(C)$ の 1 つの成分を rxs とする，端点が $\partial(D_i)$ の点 r, s で D_i の内点 x を通る弧という意味である（図 3.20）．加えて，$\mathrm{Int}\,(rxs) \cap \partial(D_i) = \emptyset$ としておいてよい．目的は，「r, s が両方ともに ab_i 上にあることはない」を示すことである．

まず，典型として，弧 rxs が，D_i 上で見て，1 回だけ折れ曲がっているとき，その点が x であったとしよう．ab_i 上で a, r, s, b_i の順に並んでいるとする．ab_i 上で r, s を端点とする弧を rs と書くと，D_i 上で $rxs \cup rs$ は a を含まない三角形の境界になっている．ここで D_i 上でこの三角形を含むように弧 $r'x's'$ を rxs と同様の条件でとることができる．

さて，特別な場合として，他のディスク D_j が ab_i を共有しないときを考える．このときは簡単である．つまり，D_i 上で $r'x's'$ をずらして ab_i 上の弧 $r's'$ に重ねる，つまり，rxs を D_i から外してしまえば，伴って変わった C，これを C' とすると，$N(C') < N(C)$ となる．ここで，何回折れ曲がっているかは本質的でないことはすぐわかる．

つぎに，D_i と ab_i を共有するディスク D_j がある場合．上とまったく同じことを D_i で行ったとき，$\partial(C') \cap D_j$ の形は変わるが成分数は増加しない．したがって，やはり $N(C') < N(C)$ となる（図 3.21）．　■

【定理 3.20】　（近似定理）M は三角形分割された 3 次元多様体とし，C は 2 次元複体とする．$g : C \to M$ は埋め込みであり，$g(C) = P$ は閉集合であるとす

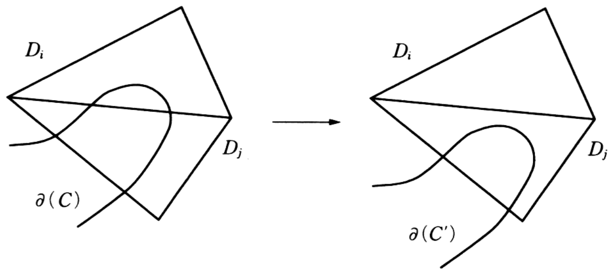


図 3.21

る．さらに，連続関数 $f: P \to R_{>0}$ を考える．このとき，M の部分多面体 P' と同相写像 $h: P \to P'$ がつぎの条件を満たすようにとれる．

(1)　$d(x, h(x)) < f(x)$,

(2)　もしも P が閉集合 K 上で局所多面体的であったならば，h は K 上で恒等写像であるようにできる，

(3)　C のどのような三角形分割をとっても，その単体 t に対して $g(t) \subset \mathrm{Bd}(M)$ ならば $hg(t) \subset \mathrm{Bd}(M)$ を満たすようにできる．

証明　2次元複体 C の三角形分割 $t_1, t_2, \cdots$ を以下の条件を満たすように十分細かくしておく．

(1) $g(t_i)$ はある PL 球近傍 N_i に含まれている，

(2) N_i の直径は $f(g(t_i))$ の最小値より小さい．

$C^{(0)}, C^{(1}$ をそれぞれ C の 0-スケルトン，1-スケルトンとしておく．

第1段階　同相写像 $h_1: P \to M$ がつぎの条件を満たすようにとれることが定理 3.15 により保証される．

(3) $h_1|g(C^{(1)})$ は恒等写像，

(4) $h_1(P)$ は $h_1(g(C^{(1)}))$ を除いて局所多面体的，

(5) $h_1(g(t_i))$ は N_i に含まれている．

第 2 段階　定理 3.17 を用いて，同相写像 $h_2 : h_1(P) \to M$ がつぎの条件を満たすようにとれる．

(6) $h_2|h_1(g(C^{(0)}))$ は恒等写像，

(7) $h_2h_1(P)$ は $h_2h_1(g(C^{(0)}))$ を除いて局所多面体的，

(8) $d(x, h_2h_1(x)) < f(x)$.

第 3 段階　定理 3.19 を同様に用いれば，求める同相写像が得られる．■

3.4　基本予想の解決

前節までの準備をもとに基本予想を証明する．もっとも一般の形で問題を記述すれば以下の通りである．

M_1, M_2 はともに 3 次元 PL 多様体であり，$g : M_1 \to M_2$ は同相写像である．$f : M_1 \to R_{>0}$ を連続関数とすれば，PL 同相写像 $h : M_1 \to M_2$ が $d(g(x), h(x)) < f(x)$ を満たすようにとれる．ただし，d は普通の距離関数である．

これを定理 3.21 の形で証明する．つまり，T_2 を標準的に見て T_1 を同相写像で近似する手法をとる．

【定理 3.21】　M は 3 次元多様体であり，$f : M \to R_{>0}$ は連続関数であるとする．T_1, T_2 をともに M の三角形分割であるとすると，PL 同相写像 $h : T_1 \to T_2$ が $d(x, h(x)) < f(x)$ を満たすようにとれる．

証明の前に前節までの準備で，T_1, T_2 についてどのような状況が明らかになっているか，つぎの命題でわかる．

【命題 3.22】　下記の条件を満たす同相写像 $h : M \to M$ がとれる．

(1)　$d(x, h(x)) < f(x)$,

(2)　s が T_1 の三角錐の面（2-単体）であるとき，$h(s)$ は T_2 の部分多面体である．

この命題が証明できれば，定理3.21の証明はほぼできたも同然といえる．

証明　T_1 の2-スケルトン $T_1^{(2)}$ は当然2次元複体であるが，T_2 から見れば2次元複体の同相写像による像に過ぎないことを注意しておく．

まず，T_1 をつぎの条件を満たすように細かく細分して，ふたたび T_1 と書こう．

(1) T_1 の3-単体 t_i は M で球近傍 N_i をもち，N_i の閉包は T_2 における部分多面体である，

(2) N_i の直径は $f(t_i)$ の最小値より小さい，

(3) N_i の閉包が $T_1^{(2)}$ を含んでしまうことはない，

(4) $\partial(t_i)$ が $T_1^{(2)}$ を分離することはない，

(5) $f: M \to R_{>0}$ は連続関数で，t_i の点 p からの距離が $f(p)$ 以下の点は N_i に含まれ，かつ $T_1^{(2)}$ の点で N_i からの距離が $f(p)$ 以上のものが存在する．

定理3.20によれば，$T_1^{(2)}$ を T_2 の部分多面体 P に写す同相写像（近似）h がとれる．T_1 の3-単体 t_i に対して，$\partial(h(t_i))$ は N_i で球の境界になっているので，h を自然に M 全体に拡張できる．これをふたたび h と書くことにする．h が近似になっていることは，$h(t_i) \subset N_i$ からわかる．h が同相写像であること，つまり1対1であることは証明しなければいけない．これは，h が近似であることと(4)の条件から，$\mathrm{Int}(h(t_i)) \cap \mathrm{Int}(h(t_j)) = \emptyset$ が得られるので証明できる．■

定理3.6の証明　上記の命題により，$T_1^{(2)}$ はすでに T_2 から見て部分多面体であるとみなせる．PL同相写像 $k: T_1^{(2)} \to T_2$ をつくるのは難しくない．これを拡張してPL同相写像 $k: T_1 \to T_2$ をつくればよい．つまり，上記命題の証明中で h を拡張した部分に着目する．ここで，$\partial(t_i)$ は単体の境界であり，一方，$k\partial(t_i))$ が T_2 でみたPL球の境界であることに注意すると，自然に求めるPL同相写像に拡張できる．

3.5　定理3.15について

ここでは3.3節の定理3.15について解説をするのが目的であって，つぎの定理 A から始めるが，正確な証明は煩雑になりすぎるきらいがあるので大筋を述べて，

議論の進み具合から納得されることを期待する.

【定理 A】 S は R^3 の中の 2 次元球面であり, ε は任意の正数とする. このとき, つぎの条件を満たす埋め込み $h : S \times [-1,1] \to R^3$ が存在する.

(1) 任意の $x \in S, t \in [-1,1]$ に対して, $d(x, h(x,t)) < \varepsilon$,

(2) $S - h(S \times [-1,1])$ は有限個の ε-ディスク（直径が ε を超えないディスク）である,

(3) 任意の $t \in [-1,1]$ に対して, $h(S \times t)$ は多面体的である.

証明　まず, ε は S の直径と比べて非常に小さいと考え, δ は ε に比べて十分に小さな正数であるとしておく. すなわち, S 上の直径 7δ 以下の部分集合は直径 $\frac{\varepsilon}{3}$ 以下のディスクに含まれるように δ を選んでおく. 実は δ の選び方はかなり精密なのだがそこまでは言及しない. つまり, この証明では非常に都合の良い場合を扱って, 方針と骨格を明らかにするに止める.

T は R^3 の三角形分割で, その 3-単体の直径は δ を超えず, 加えて頂点は S 上にないものとしておこう.

【ごくごく扱いやすい場合】

仮定: T の任意の 2-単体 s に対して, $s \cap S$ の成分数は有限であり, その各成分は $\partial(s)$ 上の点, または $\partial(s)$ 上に両端点をもち, 内点は s の内部に含まれる弧である. このような弧を “s を横切る弧” とよぶことにする.

第 1 段階　$S - T^{(2)}$ の連結成分を $D_1, D_2, \cdots, D_n$ とおくと, 各成分 D_i は T のある 3-単体に含まれているからその直径は δ より小さい. D_i の閉包 $\mathrm{cl}(D_i)$ は穴開ディスクであるので, $S - \mathrm{cl}(D_i)$ は有限個の開ディスクであり, そのうち 1 つだけ直径が $\frac{\varepsilon}{2}$ を超えている（図 3.22）.

この大きなディスクの S における補集合を D_i の拡大とよんで E_i と書く. つまり, E_i の直径は $\frac{\varepsilon}{2}$ を超えない. 適当に番号を付けて, $D_1, D_2, \cdots, D_m$ はその拡大が他の拡大に含まれないものとしておくと, $E_1, E_2, \cdots, E_m$ は S の胞体分割を与えている.

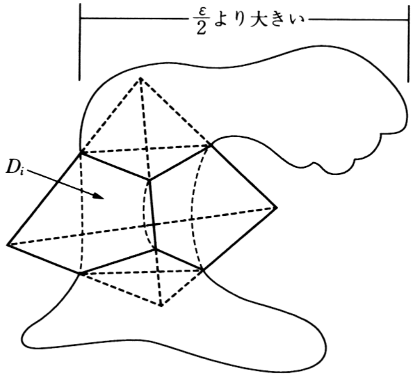


図 3.22

第2段階　$\{A_j\}$ は T のある2-単体 s を横切る $\bigcup \partial(E_i)$ 上の弧全体であるとする.

ここで，正数 θ を，A_j, A_k の距離より小さく，かつ $T^{(0)} \cup (T^{(1)} \cap S)$ の2点間の距離よりも小さく選んでおく．s 上で，A_j を含む多面体的ディスク C_j をつぎのようにとれる.

(1) C_j の点は A_j から $\dfrac{\theta}{2}$ 以内の距離にある,

(2) $C_j \cap \partial(s)$ は $A_j \cap \partial(s)$ の各点を中心とする長さ θ の線分である.

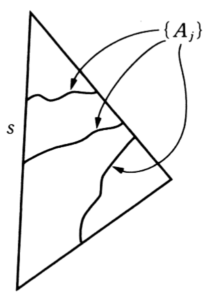


図 3.23

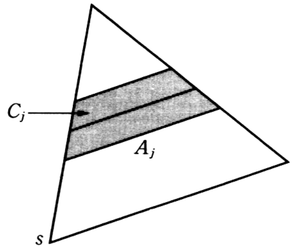


図 3.24

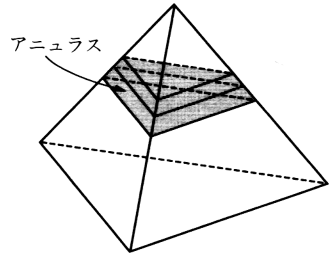


図 3.25

この C_j を集めると，$\partial(E_i)$ からの距離が $\dfrac{\theta}{2}$ 以内で $\partial(E_i)$ を含むアニュラスが得られる．

第 3 段階　ここからは同相写像のつくり方を述べる．A'_j として A_j と同じ端点をもち C_j を横切る多面体的弧をとる．

h_0 は $\partial(A_j)$ 上では恒等写像として A_j を A'_j に写す同相写像と定める．h_0 は $\bigcup A_j$ を $\bigcup A'_j$ に写していると考えてよい．

第 4 段階　$\partial(E_i)$ が T のある 3-単体 Δ の境界上に乗っている状態を考える．E'_i としてつぎの条件を満たす多面体的ディスクをとる．

(1) $\mathrm{Int}\,(E'_i) \subset \mathrm{Int}(\Delta)$,

(2) $\partial(E'_i) = h_0(\partial(E_i))$,

(3) $E'_i \cap E'_j = \emptyset$.

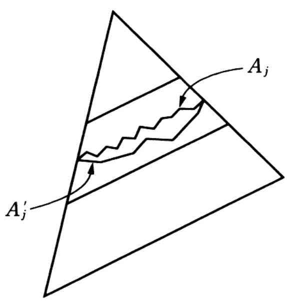


図 3.26

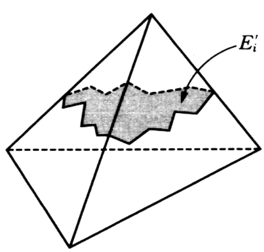


図 3.27

ここで，h_0 を E_i が E_i' に写るように拡張する．つまり，h_0 は S を多面体的球面 $S' = \bigcup E_i'$ に写している．

第5段階　E_i' の十分小さい正則近傍 Z_i を Δ 内で考える．つまり Z_i は $E_i' \times [-1,1]$ と同相で，$\partial(\Delta)$ 上では $\bigcup C_j$ と一致するようにしておく．h_0 をさらに $E_i \times [-1,1]$ から Z_i への同相写像に自然に拡張する．これをすべての E_i について行えば，結局 $S \times [-1,1]$ から $\bigcup Z_i$ への同相写像 h が得られたことになる．もちろん，$h(S \times t)$ は多面体的である．

第6段階　定理で要求されている条件 (1) は明らかであろう．

第7段階　同様に条件 (2) で要求されているディスクとしては，E_i の少し内側にとれていることも明らかである．

【ごく扱いやすい場合】

ここでの δ は，直径 3δ の部分集合が直径 $\frac{\varepsilon}{2}$ 以下のディスクに入るように選んでおけばよい．

仮定：(1) $S \cap T^{(1)}$ は有限個の点，

(2) T の 2-単体 s に対して，$S \cap s$ の連結成分と $\partial(s)$ の共通部分はたかだか 2 点である．

前の場合における横切る弧に対応して，s を横切る部分集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を考えたい．すなわち，X_i は，ある 2-単体 s に対して，$S \cap s$ の連結成分に含まれる $\partial(s)$ の 2 点があるとき，そのうちの少なくとも一方を含む連結成分全体であると定義する．先述の [ごくごく扱いやすい場合] の第1段階に相当する部分がこれからの第6段階までである．かなり精密な状況把握が必要となる．■

第1段階　$Y = S - \bigcup X_i$ の成分の直径が小さい，$\varepsilon + 3\delta \leq \frac{3\varepsilon}{2}$ を示そう．つまり，Y の 2 点 p, q に対して，$d(p,q) \geq \varepsilon + 3\delta$ とすると p, q はそれぞれ Y の異なる成分に属することがいえればよい．p, q 双方から $\frac{\varepsilon}{2}$ 以上離れている 2-単体の全体を M とおく．もちろん $M \neq \emptyset$ である．すると，$S \cap M$ のある成分 Z が S 上で p, q を分離していて，かつ Z の直径は δ より大きい．つぎに，$Z \subset \bigcup X_i$ を示すために，ある 2-単体 s について，$Z \cap s$ の連結成分 A の様子を調べる．このとき，Z には無駄がない，つまり $Z \cap s$ の成分を除くと p, q を分離しなくなるとしておく．A の直径が δ より小さいことは明らかであるから，A が単独で p, q を分離するこ

とはない．A はもちろん S の部分集合でもあるので，$A \cap \partial(s)$ は 1 点または 2 点である．もし，2 点ならば，A は $\bigcup X_i$ に含まれている．そこで，1 点のときに A が $\bigcup X_i$ に含まれていないと仮定すれば，$A - \bigcup X_i$ の点 r がとれる．r は s の内点としてよい．$Z - A = Z'$ とおくと，$Z = Z' \cup A$ であり，$Z' \cap A$ は 1 点である．Z' は p, q を分離しないのだから，結局，このような A をつないでも p, q を分離するように Z をつくることはできない．

第 2 段階　$K(X_i)$ で X_i と $S - X_i$ の直径が $\frac{\varepsilon}{2}$ 以下の成分すべての和集合を表すことにしよう．$X_i \cap T^{(1)}$ の点を $K(X_i)$ の端点とよぶことにすると，$K(X_i)$ と $K(X_j)$ の共通部分が端点以外にあれば，$K(X_i)$ と $K\ (X_j)$ には包含関係がある．ここで，極大の $K(X_i)$ を $K_1, K_2, \cdots, K_m$ とおくと，$S - \bigcup K_i$ は直径が $\varepsilon + 3\delta$ 以下の有限個の成分，$D_1, D_2, \cdots, D_d$，となる．K_i の直径が $\frac{\varepsilon}{2}$ 以下であることにも注意しておく．

第 3 段階　前の場合と同様に，D_i から E_i を定める．ここでは $B(D_i)$ で $\partial(D_i)$ 上に非端点をもつ K_j すべての和集合を表すことにする．いま，$D_i \cup B(D_i)$ から ε 以上離れた S の点 p を考えて，E_i はすぐ後で決めることにして，いまは単なる記号と考え，$B(E_i)$ をつぎのとおり定める．

(1) $B(E_i)$ は $B(D_i)$ に含まれる K_j の和集合である，

(2) $B(E_i)$ は D_i と p を分離するという意味で最小である，

ここで，$S - B(E_i)$ の成分で D_i を含むものを E_i と定義する．

第 4 段階　$E_i \cap T^{(2)}$ の成分を A とおくと，A が 2 点を $\partial(E_i)$ 上にもつことはないことに注意する．

第 5 段階　$E_i - T^{(2)}$ の成分 E'_i で $\partial(E_i) \subset \partial(E'_i)$ を満たすものがとれる．したがって，$\partial(E_i)$ の直径は δ より小さいので，E_i の直径は $\frac{\varepsilon}{2}$ 以下となる．

第 6 段階　包含関係による極大元を改めて，$E_i, i = 1, \cdots, n$ とおけば，$S = \bigcup E_i \cup \bigcup B(E_i)$ である．さらに，$\bigcup B(E_i)$ は $K_1, K_2, \cdots, K_m$ で構成されているとする．S 上で各 K_j を含む直径 $\frac{\varepsilon}{2}$ 以下の位相的ディスク G_j を，$G_j \cap G_k = K_j \cap K_k$ を満たすようにとる．これは，たとえば，K_j を局所連結になるように膨らませ，つぎに穴を埋めるなどすれば G_j がそう難しくなく得られる．G_j の中で（位相的）弧 A_j をつぎのようにとる．

(1) A_j は K_j の両端点を結ぶ,

(2) A_j の点は X_j から δ 以内の距離にある.

S を $\bigcup A_j$ で切り開くと各成分 H_i は位相的ディスクである．つまり，$S = \bigcup H_i \cup \bigcup A_j = \bigcup E_i \cup \bigcup G_j$ となっている．かつ，$\partial(H_i)$ の直径は 3δ より小さいから，H_i の直径は $\dfrac{\varepsilon}{2}$ を超えない．つまり，H_i のどの点も $\partial(E_i)$ から見て $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 以内の距離にある.

第7段階　ここからが,［ごくごく扱いやすい場合］の第2段階以降に相当している．まず，実数 θ を互いに交わらない2つの X_j 間の距離より小さく，かつ，$T^{(0)} \cup (S \cap T^{(1)})$ の任意の2点間の距離よりも小さく定める．X_j を含む2-単体を s とおいて，s 上の多面体的ディスク C_j をつぎのようにとる.

(1) $X_j \cap \mathrm{Int}(s) \subset \mathrm{Int}(C_j)$,

(2) C_j の点は X_j からの距離が $\dfrac{\theta}{2}$ 以内である,

(3) $\partial(s)C$ は長さ θ の2本の線分であり，各線分の中心は X_j の端点である.

$B(E_i)$ について対応する C_j 全体 $\bigcup C_j$ を考えると，$\bigcup C_j$ はある3-単体の境界上のアニュラスになっている.

第8段階　ここからは目的の同相写像をつくる．A'_j は A_j と同じ端点をもつ C_j を横切る多面体的弧であるとして，自然に $\bigcup A_j$ から $\bigcup A'_j$ への同相写像 h_0 をつくることができる.

第9段階　以下 h_0 を拡張して結論の同相写像を得るまでは，前の場合と並行しているので，省略する.

定理Aの完全な証明にはまだ一山も二山も越えなければならないが，本書ではここで止めて，定理3.15に続ける．完全な証明を望む読者は，文献[2]を参照されたい．ポイントは，任意の ε に対して，直径が δ 以下の部分集合は直径 ε 以下のディスクに含まれるように，δ がとれることと，$S \cap T^{(2)}$ の幾何学的状況を精密に分析して，多面体的球面を構成している点である.

これと同様の議論によって，ということはかなりハードということだが，つぎの定理Bが得られる.

【定理 B】 仮定：

(1) S は多面体的球面で，V は S の開集合である，

(2) $h' : S \to R^3$ は（位相的）埋め込みである，

(3) $f : S \to R_{\geq 0}$ は連続写像で，$f(V) \subset R > 0$ とする．

結論：局所 PL 埋め込み $h : V \times [-1,1] \to R^3$ と V 内の互いに交わらないディスク $D_1, D_2, \cdots$ が以下の条件を満たすようにとれる．

(1) $d(h'(x), h(x,t)) < f(x), x \in V$,

(2) $h'(V - \bigcup D_i) \subset h(V \times [-1,1])$,

(3) $h((V - \bigcup D_i) \times \{-1\})$ と $h((V - \bigcup D_i) \times \{1\})$ は $R^3 - h'(S)$ の異なる成分に含まれる，

(4) $h(D_i)$ の直径は $f(D_i)$ の最小値より小さい，

(5) V の点の近傍 U が存在して，U と交わる D_i は有限個である，

(6) V の閉部分集合 K 上でもともと h' が局所 PL であれば，K の点 x に対して，$h'(x) = h(x,0)$ を満たすようにできる．

定理 B から定理 3.15 を導くのは難しくない．

参考文献

[1] R.H.Bing: An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated, Ann. of Math., **69**, 37-65 (1959)

[2] R.H.Bing: Approximating surfaces from the side, Ann. of Math., **77**, 145-192 (1963)

4

球面の裏返し

3次元幾何学的トポロジーとは

トポロジーとは"ゴム膜の幾何"といわれることもあるが，ゴムは押したらへこむのでとらえどころがない．とらえるためには何か"しっかりした"ものが必要な気がする．このようなことを考えると，人間が(えらそうですね，少なくとも私が)幾何的によくわかるのは2次元平面のしかも局所的なものに限るような気がする．3次元の幾何でも"本当に"わかるためにはある意味で局所2次元に翻訳することが必要なのではないかと思っている．そこで3次元幾何学的トポロジーの個人的暫定的定義は「局所2次元に翻訳することにより幾何的対象をexactに理解しようとあがくトポロジー」とでもしておきましょう．

この章では 3 次元ユークリッド空間内の球面を裏返すことを試みる．そのことを通じて幾何学的トポロジーによる図形のホモトピー変形の取扱いになれることも目標にしよう．前半は平面内の閉曲線の変形を考え，取扱いになれたところで球面の裏返しを試みてみよう．この章では写像は可微分 (無限回微分可能) なものだけを考えることにする．ここでの議論は PL 写像でも同様に成り立つことを注意しておく．

4.1　閉曲線は裏返せない

平面内の閉曲線に対し回転数というものを定義したい．そのため最初に円周上の連続写像に対しその写像度というものを定義する．円周 $S^1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とその上の連続写像 $\gamma : S^1 \to S^1$ を考える．S^1 上の点 p が S^1 を正の向き (反時計まわり) に 1 周するとき，$\gamma(p)$ が S^1 を何回まわるかを正負の向きも込めて $\deg(\gamma)$ と書く．この定義は少し文学的 (?) なのでもう少しきちんと述べよう．

【定義 4.1】 実数 $\boldsymbol{R}$ から S^1 への写像 Π を $\Pi(t) = (\cos t, \sin t)$ で定める．この Π は S^1 の普遍被覆になっている．この写像を $[0, 2\pi]$ に制限した写像 $\Pi|_{[0,2\pi]}$ を Π' と書こう．S^1 から S^1 への連続写像 γ に対し $\gamma \circ \Pi'$ の $\boldsymbol{R}$ への **持上げ** (lift) $\tilde{\gamma}$ が存在する．ここで 持上げ $\tilde{\gamma}$ とは $\Pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma \circ \Pi'$ を満たす連続写像のことである．このとき γ の**写像度** (degree) を

$$\deg(\gamma) = \frac{\tilde{\gamma}(2\pi) - \tilde{\gamma}(0)}{2\pi}$$

で定義する．

このとき，この定義が well-defined であること，つまり $\tilde{\gamma}$ の取り方によらないことは注意する必要があるだろう．$\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ を γ の 2 つの 持上げとする．このとき各 $t \in [0, 2\pi]$ に対し $\Pi(\tilde{\gamma}_1(t)) = \gamma(\Pi'(t)) = \Pi(\tilde{\gamma}_2(t))$ が成立するので整数 n_t が存在して $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t) + 2n_t\pi$ と書ける．$\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ の連続性より n_t は t に依存しない定数 n でなければならない．よって任意の $t \in [0, 2\pi]$ に対し $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t) + 2n\pi$ と書け，

$$\frac{\tilde{\gamma}_1(2\pi) - \tilde{\gamma}_1(0)}{2\pi} = \frac{\tilde{\gamma}_2(2\pi) + 2n\pi - (\tilde{\gamma}_2(0) + 2n\pi)}{2\pi} = \frac{\tilde{\gamma}_2(2\pi) - \tilde{\gamma}_2(0)}{2\pi}$$

となる．

与えられた写像に対しその写像度を求める方法を考えよう．$\gamma : S^1 \to S^1$ を連続写像とする．混乱の恐れのないときは $\gamma \circ \Pi'$ のことも γ と書くことにしよう．γ のある持上げを $\tilde{\gamma}$ とすると，$t \in [0, 2\pi]$ に対し

$$\gamma(t) = (\cos \tilde{\gamma}(t), \sin \tilde{\gamma}(t))$$

と表される．このとき

$$\gamma'(t) = (-\sin\tilde{\gamma}(t)\cdot\tilde{\gamma}'(t), \cos\tilde{\gamma}(t)\cdot\tilde{\gamma}'(t))$$

となる．2つのベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ に対し行列式を

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

で書くと，

$$\begin{vmatrix} \gamma(t) \\ \gamma'(t) \end{vmatrix} = \tilde{\gamma}'(t)\begin{vmatrix} \cos\tilde{\gamma}(t) & \sin\tilde{\gamma}(t) \\ -\sin\tilde{\gamma}(t) & \cos\tilde{\gamma}(t) \end{vmatrix} = \tilde{\gamma}'(t)$$

となるので

$$\int_0^{2\pi}\begin{vmatrix} \gamma(t) \\ \gamma'(t) \end{vmatrix} dt = \int_0^{2\pi}\tilde{\gamma}'(t)dt = \tilde{\gamma}(2\pi) - \tilde{\gamma}(0)$$

を得る．以上の議論からつぎの命題が示された．

【命題 4.2】　γ の写像度は

$$\deg\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{vmatrix} \gamma(t) \\ \gamma'(t) \end{vmatrix} dt$$

で与えられる．

問題 4.1　整数 n に対し S^1 上の写像 γ_n を $\gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt)$ で定義するとき，$\deg\gamma_n$ を求めよ．

命題 4.2 は写像度を表す解析的な式であるが，写像度そのものは連続であれば定義される．そのような写像度には解析的ではない求め方ももちろんある．ここでは幾何的な方法を紹介しておこう．

$\gamma : S^1 \to S^1$ が与えられているとする．S^1 上の点 p を1つ固定する．ただし $p \neq \gamma(0)$ となるものとする．このとき $\tilde{\gamma}^{-1}\circ\Pi^{-1}(p)$ は有限個の点 $t_1, \cdots, t_m$ からなると仮定する．各 $t_i \in [0, 2\pi]$ に対し t_i で $\tilde{\gamma}$ は増加の状態にあるか，減少の状態

にあるか，極値であるかのいずれかであるとする．このとき一般に

$$\deg\gamma = (\text{増加の状態にある点の個数}) - (\text{減少の状態にある点の個数}) \qquad (*)$$

が成立する．

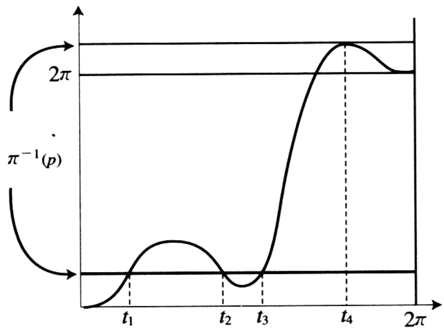


図 4.1

図 4.1 のように $\tilde{\gamma}$ が与えられているとする． 点 p に対し $\tilde{\gamma}^{-1}(\Pi^{-1}(p)) = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ であるが，増加の状態にあるのは t_1, t_3 の 2 個，減少の状態にあるのは t_2 の 1 個である．このとき実際

$$\deg\gamma = (\text{増加の状態にある点の個数}) - (\text{減少の状態にある点の個数}) = 1$$

となっている．

問題 4.2 $(*)$ を証明せよ．

問題 4.3 問題 4.1 に対してこの方法で写像度を求めよ．

円周 S^1 から平面 $\boldsymbol{R}^2$ への写像 $f : S^1 \to \boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{R}^2$ 内の**閉曲線** (closed curve) とよぶことにする．S^1 上の写像がそうだったように，混乱の恐れのないときは f と $f \circ \Pi'$ を混同させて用いる．つまり写像

$$f : S^1 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$$

$$(\cos t, \sin t) \longrightarrow (x(t), y(t))$$

に対し $f \circ \Pi'(t) = f(t)$ という混同を認めることにする．このとき f を t で微分すると，$\dfrac{df}{dt} = (\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt})$ となる．

【定義 4.3】 閉曲線 $f : S^1 \to \boldsymbol{R}^2$ が各 $t \in [0, 2\pi]$ に対し$\left\|\dfrac{df}{dt}\right\| \neq 0$ を満たすとき**正則閉曲線** (regular closed curve) という．ただしベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ に対し $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ とする．

正則閉曲線 f に対し **ガウス写像** (Gauss map) $\gamma_f : S^1 \to S^1$ が

$$\gamma_f(t) = \frac{\dfrac{df}{dt}}{\left\|\dfrac{df}{dt}\right\|}$$

で定義される．この γ_f の写像度をこの正則閉曲線 f の**回転数** (rotation number) といい，$R(f)$ と書く．

2 つの正則閉曲線 f, g に対し f から g へのホモトピー $f_s(0 \le s \le 1$ かつ $f_0 = f, f_1 = g)$ で各 $s \in [0,1]$ に対し f_s が正則閉曲線になっているようなものが存在するとき f と g は**正則ホモトピック** (regular homotopic) であるという．このホモトピーを**正則ホモトピー** (regular homotopy) とよぶ．正則ホモトピー f_s に対し $\dfrac{df_s}{dt}, \dfrac{d^2 f_s}{dt^2}$ も s に関して連続であることを仮定することにしよう．

問題 4.4 正則閉曲線 f がとくに $S^1 \subset \boldsymbol{R}^2$ への写像であるとき $R(f) = \deg(f)$ を示せ．

われわれがこの節で示したいのはつぎの定理である．

【定理 4.4】 (Whitney) 2 つの正則閉曲線 f, g に対しつぎの 2 つは同値である．

(1)　f と g は正則ホモトピックである．

(2)　$R(f) = R(g)$ が成立する．

(1) から (2) を示すことはそれほど難しくない．それを示すために，命題を 1 つ用意する．

【命題 4.5】　正則閉曲線 f に対し

$$R(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\|f'\|^2}\begin{vmatrix} f' \\ f'' \end{vmatrix} dt$$

が成立する．

証明　$\|f'\|\gamma_f = f'$ の両辺を t で微分すると $\|f'\|'\gamma_f + \|f'\|\gamma_f' = f''$ なので，

$$\begin{vmatrix} f' \\ f'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \|f'\|\gamma_f \\ \|f'\|'\gamma_f + \|f'\|\gamma_f' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \|f'\|\gamma_f \\ \|f'\|'\gamma_f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \|f'\|\gamma_f \\ \|f'\|\gamma_f' \end{vmatrix} = \|f'\|^2 \begin{vmatrix} \gamma_f \\ \gamma_f' \end{vmatrix}$$

を得る．これに$\gamma = \gamma_f$ として命題 4.2 を適用すればよい．■

(**定理 4.4 の** (1) **から** (2) **の証明**)　f_s を f から g への正則ホモトピーとする．命題 4.5 より $R(f_s)$ は s に関して連続関数であることがわかる．一方，回転数 $R(f_s)$ は整数値関数なので定数でなければならない．よって $R(f) = R(f_0) = R(f_1) = R(g)$ が成立する．

問題 4.5　命題 4.5 を用いて図 4.2 のような正則閉曲線 $f(t) = (\cos t, \cos t \sin t)$ の回転数を求めよ．

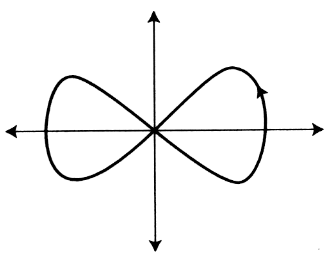


図 4.2

回転数を幾何学的に求めることを考えよう．$\gamma_f : S^1 \to S^1$ の写像度を求めればよいのだが，以前やった幾何的方法を適用しよう．$p \in S^1$ を固定するということは $\overrightarrow{op}$ (o は原点) というベクトルを固定することに対応する．$\tilde{\gamma}_f^{-1}(\Pi^{-1}(p)) = \{t_1, \cdots, t_m\}$ とすると $f'(t_i) = \alpha_i \overrightarrow{op}$ ($\alpha_i > 0$) と書ける．

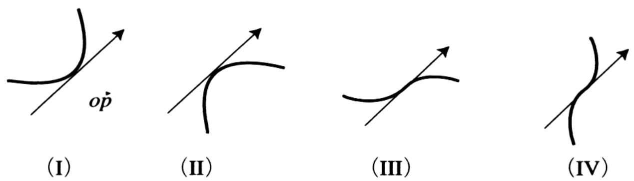


図 4.3

図 4.3 の (I) のとき $\tilde{\gamma}_f$ は増加の状態にあり，(II) では減少の状態，右の 2 つ (III),(IV) では極値になっている．よって方向を 1 つ固定したとき f の回転数は

(I) のタイプの個数 − (II) のタイプの個数

で与えられる．

問題 4.6　この方法で問題 4.5 の回転数を求めよ．

この節の残りで定理 4.4 の (2) から (1) の部分を証明しよう．そのためにいくつかの幾何学的議論をする．ここでは以下正則閉曲線をその像を用いて表すことにする．たとえば問題 4.5 の例の場合でいうと，$f(t) = (\cos t, \cos t \sin t)$ という正則閉曲線を図 4.2 で表す．向きを示す必要があるときは図のように曲線に矢印をつけることにする．矢印はパラメータを大きくしたとき (角度を正の方向に動かしたとき) 点の位置の変化する方向につけるものとする．

正則閉曲線 f を考える．曲線上の点 $p \in f(S^1)$ に対し $\#f^{-1}(p) = n$ のとき，$f^{-1}(p) = \{a_1, \cdots, a_n\}$ とおくと，この各 a_i $(i = 1, \cdots, n)$ を n 重点という．ここで $\#A$ は集合 A の要素の個数を表す．

図 4.4 からわかるように，正則ホモトピーで変形することにより，n 重点 $(n \geq 3)$ を消すことができる．また 2 重点も，接するようなものは図 4.5 のように消すこ

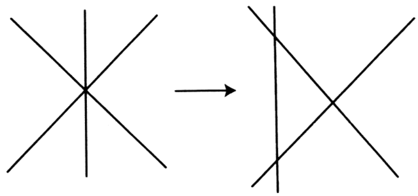


図 4.4

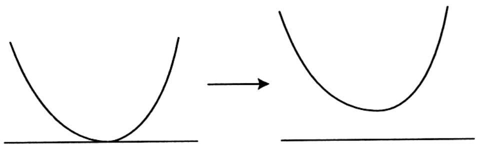


図 4.5

とができる．以下正則閉曲線は n 重点 $(n \geq 3)$ はもたず，2 重点も接するタイプのものはないとして話を進める．

正則ホモトピーの変形のタイプを具体的に与えることから始めよう．図 4.4 のように図で正則ホモトピーを表すことにしよう．つまり s を変化させたときの変化を f_s でではなく $f_s(S^1)$ で見ることにする．他の部分は変化させずに局所的につぎの図 4.6 のように変化させる変形 (I),(II),(0) を考える．

(I) は 2 重点を 2 つ発生させる変形 ($(\mathrm{I})^{-1}$ はその逆変形)，(II) は 2 重点の相互関係を変化させる変形，(0) は位置を移動するが相互関係を変化させない変形である．第 1 章で述べたように「トポロジカルに同じものは同じ」と見なす立場からは同じものなので，変形 (0) は以後断わらずに使用する．このときつぎが成立する．

【命題 4.6】 変形 (I),$(\mathrm{I})^{-1}$,(II) は正則ホモトピーの変形で実現できる．

この命題は直感的には明らかに思われるが，きちんと証明しようとすると，トポロジーの基礎的な議論の積み重ねが必要なことに気がつくだろう（じつは 3 重

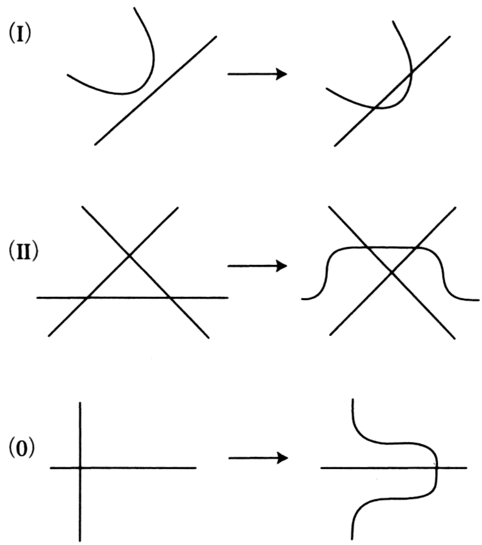


図 4.6

点以上を消すことができるということにも同じ事情があったのだが…）．ここではこの命題は認めて先に進むことにしよう（しかし，“きちんと” 考えたい人のために問題にしておこう）．

問題 4.7　命題 4.6 を “きちんと” 証明せよ．

図 4.7 のような正則閉曲線を標準形とよぼう．

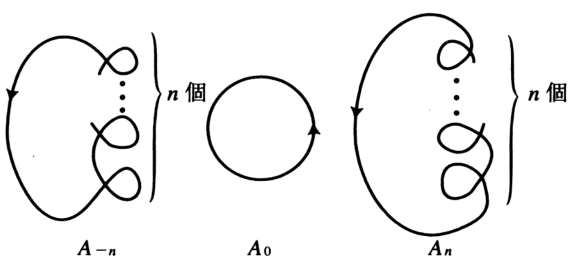


図 4.7

問題 4.8　標準形の正則閉曲線 A_n に対し $R(A_n) = n + 1$ であることを示せ．

【命題 4.7】　正則閉曲線は (I),(I)$^{-1}$,(II) の変形を有限回繰り返し用いて標準形に変形できる．

この命題を示すことができれば，これから定理 4.4 の残りの部分 ((2) から (1)) は出てくる．f と g を $R(f) = R(g)$ となる 2 つの正則閉曲線とする．命題 4.7 が示されれば，f を (I),(I)$^{-1}$,(II) の変形の有限列で標準形 A_n に変形できる．このとき命題 4.6 より f と A_n は正則ホモトピックである．g も同様で A_m に変形できる．問題 4.8 より $n = R(f) - 1 = R(g) - 1 = m$ であり，$A_n = A_m$ がわかるので，f と g は正則ホモトピックである．

(II) の逆変形がまた (II) であることに注意すれば，つぎの定理が得られていることがわかる．

【定理 4.8】　正則閉曲線の正則ホモトピーによる変形は (I),(I)$^{-1}$,(II) の有限回の繰返しで実現できる．

以下命題 4.7 を証明することを目標に議論していく．つぎの記号を用いる．$a, b \in S^1$ $(a \neq b)$ に対し，a と b の間にある部分を (a, b)，境界も含めた部分を $[a, b]$ と書きたい．しかし，これではどちらの部分かわからないのでつぎのように定める．$a = (\cos t_0, \sin t_0)$ と表されているとき，$b = (\cos t_1, \sin t_1)$ かつ $t_0 < t_1 < t_0 + 2\pi$ となる t_1 が一意に定まる．このとき

$$(a, b) = \{(\cos t, \sin t) \,|\, t_0 < t < t_1\}$$

$$[a, b] = \{(\cos t, \sin t) \,|\, t_0 \leq t \leq t_1\}$$

と定める（図 4.8）．

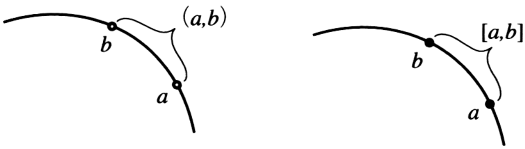


図 4.8

【補題 4.9】　つぎの変形は (I),(I)$^{-1}$,(II) の変形を有限回用いて実現できる (実際は (I)$^{-1}$ は必要ない).

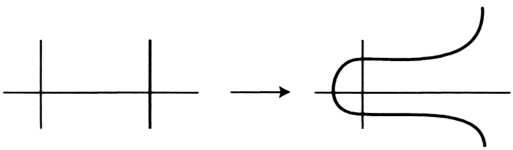


図 4.9

この補題はつぎの図 4.10 より明らかであろう.

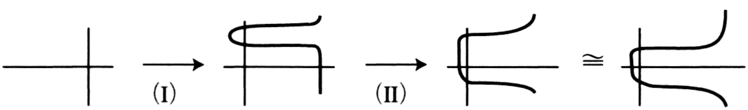


図 4.10

以下像が a となる 2 重点を a_1, a_2 と書くことにする．つまり $f(a_1) = a = f(a_2)$ である．また $i = 1$ または 2 に対し $i' = 3 - i$ という記号も用いる.

【補題 4.10】　正則閉曲線 f に 2 重点 z_1, z_2 が存在するとき，(I),(I)$^{-1}$,(II) の変形を有限回用いて f を変形して，2 重点 a_1, a_2 で $a_1, a_2 \in [z_1, z_2]$ かつ (a_1, a_2)

に 2 重点がないものが存在するようにできる．さらにこの変形で 2 重点の個数が増えないようにできる．

証明　$z_1 = a_1, z_2 = a_2$ とおく．2 重点 a_1, a_2 に対し (a_1, a_2) のなかに 2 重点で $b_1, b_2 \in (a_1, a_2)$ となるものが存在すれば，a を b におき直すことにより，$b_i \in (a_1, a_2)$ ならば $b_{i'} \notin (a_1, a_2)$ としてよい．

このとき $f|_{(a_1,a_2)}$ は 1 対 1 なので $f([a_1, a_2])$ は単純閉曲線となり，あるディスク D の境界となっている．(a_1, a_2) に 2 重点が存在しない場合，補題は示されているので，2 重点が存在するときを考える．このとき，つぎの 2 つの場合に分ける．

(1) D の内点 $\mathrm{Int}\, D$ に 2 重点像が存在する場合

(2) D の内点 $\mathrm{Int}\, D$ に 2 重点像が存在しない場合

ケース 1　$\mathrm{Int}\, D$ に 2 重点が存在するとき．

このときつぎのような 2 重点 b_1, b_2, c_1, c_2 が存在する．$f(b_i) = b \in \mathrm{Int}\, D$, $f(c_j) \in \partial D$ かつ，(b_i, c_j) または (c_j, b_i) は 2 重点を含まない．$c \neq a$ のときこれをタイプ C，$c = a$ のときタイプ A とよぶ．

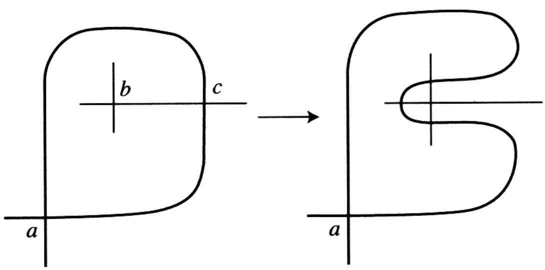


図 4.11

2 重点像がタイプ C のとき補題 4.9 を用いて図 4.11 のように変形できる．この変形で (a_1, a_2) に 2 重点は増えるが，$f([a_1, a_2])$ (ただし変形した後の写像も f と書く—以下同様) が張るディスク D の内部の 2 重点像の数は減っていく．よって有限回の段階で $\mathrm{Int}\, D$ にタイプ C の 2 重点像はないとしてよい．$\mathrm{Int}\, D$ にタイプ A

の 2 重点像が存在するとき，(a_1, a_2) に 2 重点像は存在しない (図 4.12 参照) ので補題は成立している．よって Int D に 2 重点像はないとしてよい．

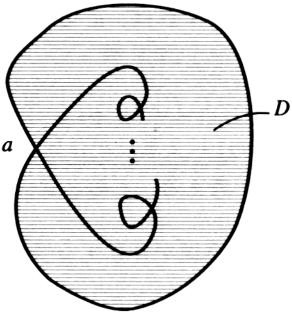


図 4.12

ケース 2　∂D にのみ 2 重点が存在するとき．

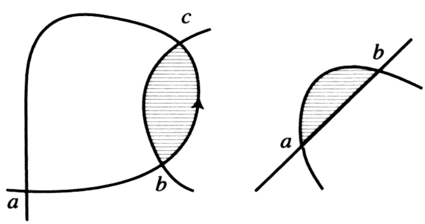


図 4.13

2 重点が存在するとき，もっとも境界よりのものが存在する．つまり $(b_i, c_j) \subset (a_1, a_2)$ で (b_i, c_j) は 2 重点を含まず，$(b_{i'}, c_{j'})$ または $(c_{j'}, b_{i'})$ も 2 重点を含まず，D の内部 Int D に写される．$c = a$ または $b = a$ のときタイプ A，$c \neq a, b \neq a$ のとき タイプ C とよぶ．タイプ C に対しては図 4.13 の左の図のように (b_i, c_j) の部分を $(\mathrm{I})^{-1}$ で変形することにより 2 重点を 2 つ消すことができる．これを繰り返していけば タイプ C はないとしてよい．タイプ A が存在するとき，図 4.14 の

ようになっているので $(\mathrm{I})^{-1}$ で変形し，a として c を採用すればよい．以上で条件を満たす a_1, a_2 をとることができた．2 重点の個数は，(a_1, a_2) 以外のところは変形をしていないので，変形の途中で増えることはあるが，変形の最初と最後とを比較すると，減ることはあっても増えることはない． ■

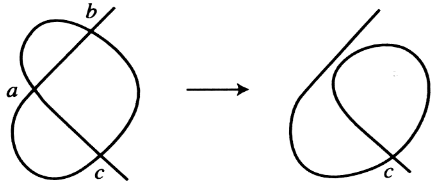


図 4.14

2 重点 a_1, a_2 が (a_1, a_2) に 2 重点をもたないとする．$f([a_1, a_2])$ が張るディスク D が $f(S^1)$ をすべて含むとき，(a_1, a_2) を bad type とよぶ（図 4.12 は bad type ）．bad type でないものを good type とよぶ．

【補題 4.11】 a_1, a_2 は 2 重点で，(a_1, a_2) は good type とする．また 2 重点 b_i は (b_i, a_1) または (a_2, b_i) に 2 重点をもたないとする．このとき (I),$(\mathrm{I})^{-1}$,(II) の変形を有限回行ってつぎの図 4.15 の変形を実現できる．

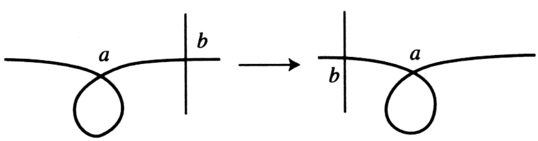


図 4.15

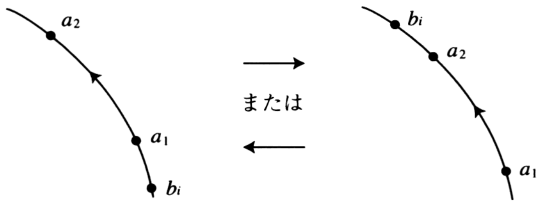


図 4.16

この補題は原像でいうと図 4.16 のように 2 重点 a_1, a_2 をペアとして，隣の 2 重点と入れ替える変形ができることを意味している．

問題 4.9 補題 4.11 を証明せよ．

さていよいよ命題 4.7 を示そう．最初につぎを示す．

ファクト 1 『正則閉曲線は (I),(I)$^{-1}$,(II) の変形を有限回用いてつぎの形に変形できる；2 重点がないか，すべての 2 重点が正の方向に

$$a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, \cdots, a_1^n, a_2^n$$

となっていて，すべて good type である．』

2 重点が存在する場合補題 4.10 を用いると，2 重点 a_1, a_2 は (a_1, a_2) に 2 重点がないとしてよい．(a_2, a_1) に 2 重点が存在しないとき，(a_1, a_2) が bad type であれば，(a_2, a_1) は good type なので $a_1^1 = a_2, a_2^1 = a_1$ とおけばよい．(a_2, a_1) に 2 重点が存在すれば，ふたたび補題 4.10 を用いて，(a_2, a_1) に 2 重点 a_1^1, a_2^1 で (a_1^1, a_2^1) に 2 重点がないものをつくることができる．(a_1^1, a_2^1) が bad type のときは a^1 と a をおき直す $(a_1 \to a, a \to a_1)$．bad type は 1 つしか存在しないので 新しい (a_1^1, a_2^1) は good type である．補題 4.11 を繰り返して用いることにより，(a_1, a_2) の部分に移動することができる．

この変形の後に (a_2, a_1) に 2 重点があれば同様に変形する．これを繰り返して，(a_1, a_2) には 2 重点が正の方向に

$$a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, \cdots, a_1^{n-1}, a_2^{n-1}$$

となっていて，(a_2, a_1) に 2 重点はないとしてよい．このとき $a_1^n = a_2, a_2^n = a_1$ とおくと，すべての 2 重点が

$$a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, \cdots, a_1^n, a_2^n$$

と並んでいるとしてよい．

bad type が存在するとき，a_1^1, a_2^1 を bad type とする．S^1 の正の向きに沿って a_1^2 の少し前の点を a'，a_2^n の少し後の点を b' とおく．このときアイソトピーで変形して，$f([a', b'] - \bigcup_{k=2}^n (a_1^k, a_2^k))$ の部分が図 4.17 のように y–軸上に乗るようにできる．

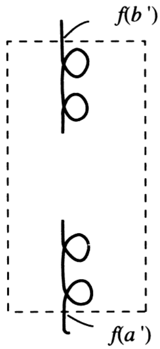


図 4.17

このとき補題 4.11 を繰り返し用い，図 4.18 のような変形をして，bad type を消すことができる．よってファクト 1 は示された．

2 重点 a_1, a_2 に対し，$\dfrac{df}{dt}(a_i), \dfrac{df}{dt}(a_{i'})$ がこの順で，右手系をなすとき a_i を R 型，左手系をなすとき L 型とよぶことにしよう．図 4.19 では a_1 は R 型，a_2 は L 型である．

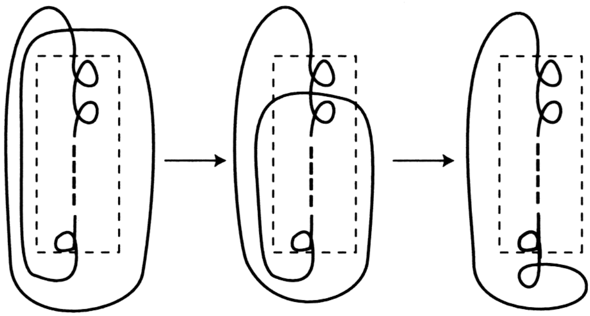


図 4.18

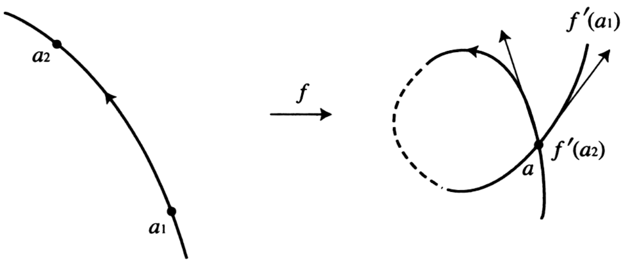


図 4.19

ファクト 2『2 重点が正の方向に a_1, a_2, b_1, b_2 の順に並んでいて，間に他の 2 重点がなく，a_1 と b_1 の型が異なるとき，ともに good type ならば (I),(I)$^{-1}$,(II) の変形の有限回の列で 2 重点を消すことができる.』

証明はつぎの図 4.20 から明らかであろう．図は a_1 が L 型，b_1 が R 型の場合だが逆でも同様にできる．

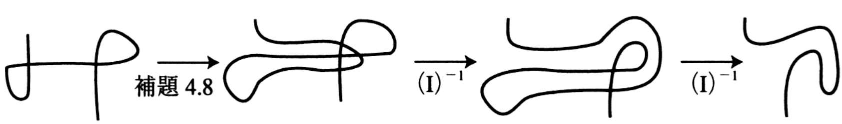


図 4.20

ファクト 1 のように $a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, \cdots, a_1^n, a_2^n$ をとっておく．a_1^k と a_1^{k+1} $(k = 1, \cdots, n-1)$ の型が異なるときはファクト 2 を用いて 2 重点を消すことができる．よってすべての 2 重点の型は同じとする．S^1 の正の向きに沿って a_1^1 の少し前の点を a'，a_2^n の少し後の点を b' とおく．このとき $f([a', b'] - \amalg \bigcup_{k=1}^n \amalg (a_1^k, a_2^k))$ をアイソトピーで変形して，y–軸上，下から上の方向に乗るようにできる．このとき $f((b', a'))$ はつぎの 2 つの場合がある (図 4.21 は $n=3$ で a_1^k が R 型のもの)．

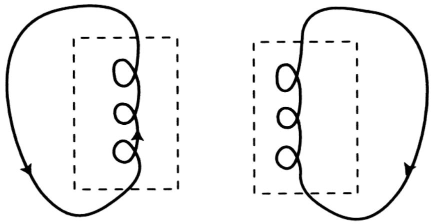


図 4.21

図の左は標準形である．右の場合は図 4.22 のように(I) と補題 4.11 の変形を繰

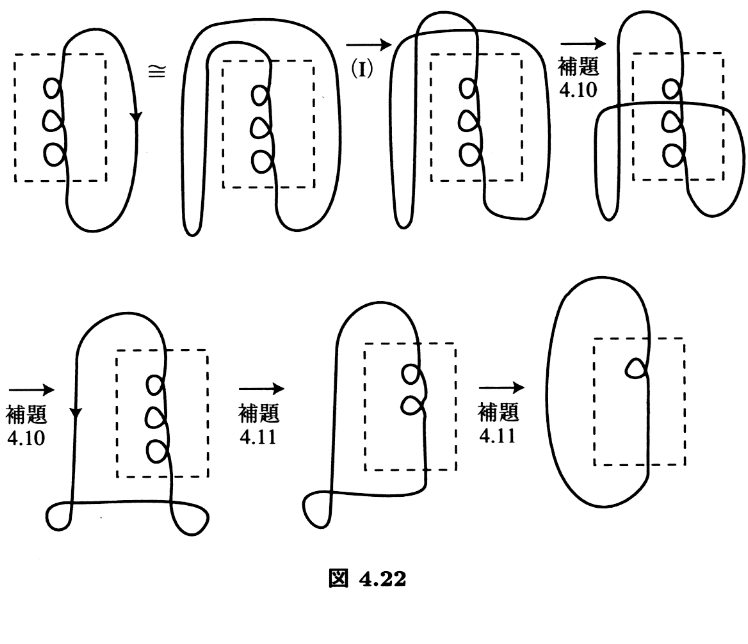


図 4.22

り返し，必要なら (a_1^k が R 型のときは必要) ファクト 2 の変形を用いることにより，標準形に直すことができる．以上で命題 4.7 は示された．

標準形のうち中への同相写像と正則ホモトピックなものはどれだろう．A_0 は同相写像であるが，A_{-2} も図 4.23 のように $(\mathrm{I})^{-1}$ をすることにより同相写像に変形できることがわかる．

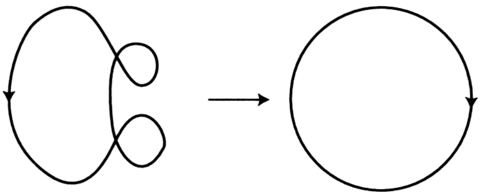


図 4.23

問題 4.10　他の $(n \neq 0, -2)$ 標準形が同相写像と正則ホモトピックにならないことを示せ．

A_0 を正の (順な) 向きの単純閉曲線とすると，A_{-2} を変形したものは負の (逆の) 向きの単純閉曲線である．定理 4.4 は正の向きの単純閉曲線を正則ホモトピーで変形しても逆向きの単純閉曲線には変形できないことを含んでいる．このことをスローガン的に書くと

『平面上の単純閉曲線は正則ホモトピーで裏返すことはできない』

となる．

4.2　球面は裏返すことができる

前節の最後で書いたことを次元を 1 つ上げるとどうなるかというのがこの節の話題であり，この章のメインテーマでもある．スローガン的に書くと (球面に対する正則ホモトピーの定義はまだしていないが) つぎのようになる．

『3 次元ユークリッド空間内の球面は正則ホモトピーで裏返すことができるか』

平面上の正則単純閉曲線が正則ホモトピーで裏返せないのだから，できないだろうと多くのトポロジストに思われていた．だからステファン・スメール (Stephen Smale) が1950年代後半にできることを示したとき，彼の学位論文の指導教官も最初は信じなかったというエピソードが残っている．スメールは裏返すことを証明したが，その正則ホモトピーを具体的に構成したわけではない (もちろん本質的には定理の証明に含まれているのだが)．その後アーノルド・シャピロ (Arnold Shapiro) やベルナール・モラン (Bernard Morin, フランスの盲目の数学者) によって具体的に構成された (これらの変形に興味のある人は文献 [1] と [2] を参照されたい)．ここではモランのもの ([1] より少し改良されている) を紹介しよう．

正則球面およびその正則ホモトピーの定義から始めよう．

【定義 4.12】 2次元球面 S^2 から3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f を考える．S^2 の各点 p に対し f が誘導する接空間の間の写像

$$f_* : T_p(S^2) \longrightarrow T_{f(p)}(\boldsymbol{R}^3)$$

が1対1のとき，f を**正則球面** (regular sphere) とよぶ．

2つの正則球面 f, g に対し，f から g へのホモトピー $f_s\,(0 \leq 1, f = f_0, g = f_1)$ で各 $s \in [0,1]$ に対し f_s が正則球面になるようなものが存在するとき，f と g は**正則ホモトピック** (regular homotopic) であるといい，このホモトピーを**正則ホモトピー** (regular homotopy) とよぶ．

接空間の定義を知らない人のために正則球面の別の定義を述べておこう．$f : S^2 \to \boldsymbol{R}^3$ と S^2 の任意の点 p が与えられているとき，多様体の定義より p の開近傍 (U, ϕ)；p を含む S^2 の開集合 U と U から $\boldsymbol{R}^2$ の中への同相写像 $\phi : U \to \boldsymbol{R}^2$ が存在する．ただし $\phi(p) = (0,0)$, $\phi(U) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ となるものを選んでおく．また $f(p)$ の開近傍を V とすると，3次元球 $B^3 = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 | x^2 + y^2 + x^2 \leq 1\}$ への同相写像 Φ が存在するものがある．U, ϕ, V, Φ を適当に選んで $\Phi \circ f \circ \phi^{-1}(x,y) = (x,y,0)$ とできるとき，f を正則球面とよぶ．つまり各点 p のある近傍 U に対し $f(U)$ は“きれいな” 曲面になっていることを意味している．

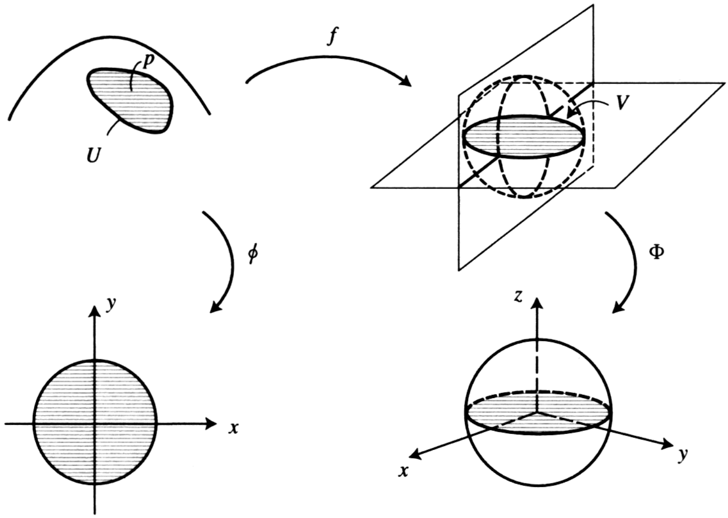


図 4.24

スメールは2つの正則球面 f, g に対し，ある可換群 G に値をもつ不変量 $\Omega(f,g)$ を構成した．そしてつぎのような定理を証明した．

【定理 4.13】 2つの正則球面 f, g に対し，つぎは同値である．

(1)　f と g は正則ホモトピックである．

(2)　$\Omega(f,g) = 0$ が成立する．

ここでは $\Omega(f,g), G$ の定義は述べない．興味のある人は原論文 [3] を参考にしてほしい．ここまでは前節の定理 4.4 と同じようだがこの後は違う．この群 G は代数的位相幾何学の議論から $\{0\}$ であることが知られていて，結局

『すべての正則球面は正則ホモトピックである』

ということが結論される．

この節の残りの部分で，球面が裏返せることを具体的に見よう．前節でやったよ

うに基本的な変形を組み合わせていく方法でこれを行う.

以後『お絵書きモード』に入ります. 文体も少し変えます. 絵を見ながら変形の様子を頭に描いて下さい. 前節と違って空間内を面が動いていくので, 少し考えにくいかもしれません. 絵を追うのに疲れたらしばらく休むのもよし, この章の残りの部分をとばすのもいいでしょう. 後の章には直接関係ないと思います.

前節と同じように正則球面をその像を用いて表すことにします. 必要のあるときは図 4.25 のように, 向きに対応するものとして, もともとの球面は表に青, 裏に赤が塗ってあると考えて色をつけて絵を書くことにしましょう. カラーなのは口絵だけなのでここでは白黒で我慢しましょう. 横線部分が青, 点々部分が赤と思って下さい.

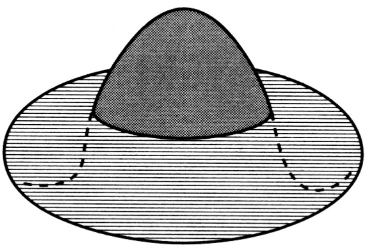


図 4.25

正則球面 f と 点 $p \in f(S^2)$ に対し $\#f^{-1}(p) = n$ のとき, $f^{-1}(p) = \{a_1, \cdots, a_n\}$ とおくと, この各 a_i $(i = 1, \cdots, n)$ を n 重点というのは曲線のときと同じです. $n \geq 2$ の場合の n 重点を**特異点** (singular point) とよびましょう. 特異点の様子を見ましょう. 平面のときと同じように 2 重点はありえます. 曲線の場合 2 重点はポツポツと離散的に出てきましたが, 今度は図 4.26 からわかるように 1 次元的になっています.

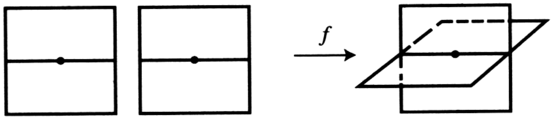


図 4.26

3重点は曲線の場合は消すことができましたが，今度は一般に局所的変形だけでは消すことができません．図からわかるように3重点は離散的に出てきています．2重点，3重点いずれの場合もそれぞれの面が横断的に交わっている(接してはいない)ものを書いています．

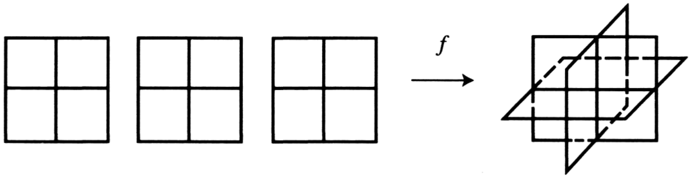


図 4.27

実は本質的には特異点は以上のものに限ることがわかります．つまりつぎが成立します．

『正則球面を正則ホモトピーで変形して，特異点は前の2つのタイプだけにすることができる.』　(**)

これを一般的に示すのは少し議論の積み重ねが必要なので特別なタイプ —ここでは接するタイプの3重点を局所的変形で消してみましょう．全部を1つの絵で描くとかえってわかりにくいので，パーツに分けて考えましょう．

図 4.28 の A の部分の2重線(2重点からできている曲線)の像と B の平面が接しているとします．B を少し下げると3重点はなくなります．変形後の特異点の様子がどうなるかは，A の4枚羽根と B の相対的位置関係によります．トレーニングを兼ねて問題としておきましょう．

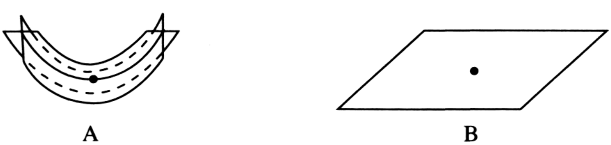


図 4.28

問題 4.11　A の 4 枚羽根と B の交わりが図 4.29 のようなとき，変形後の特異点の様子を調べて下さい．

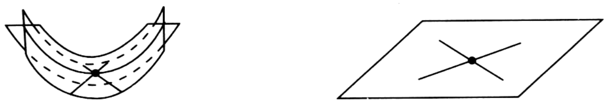


図 4.29

さらにトレーニングをしたい人につぎの問題を出しましょう．

問題 4.12　(**) を証明して下さい．

平面のときと同じように基本となる変形を定義します．(I) は2重点を発生させ

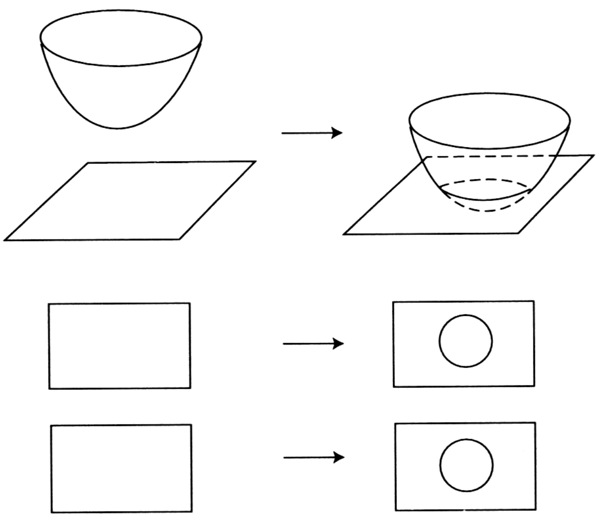


図 4.30

る変形です．図 4.30 の下は原像の絵です．

(II) は 2 重線の位置を変えて 3 重点を 2 つ発生させる変形です．図 4.31 の点線 (ガイドラインと呼びましょう) に沿って面を指で押していき，別の面と交差させたものです．

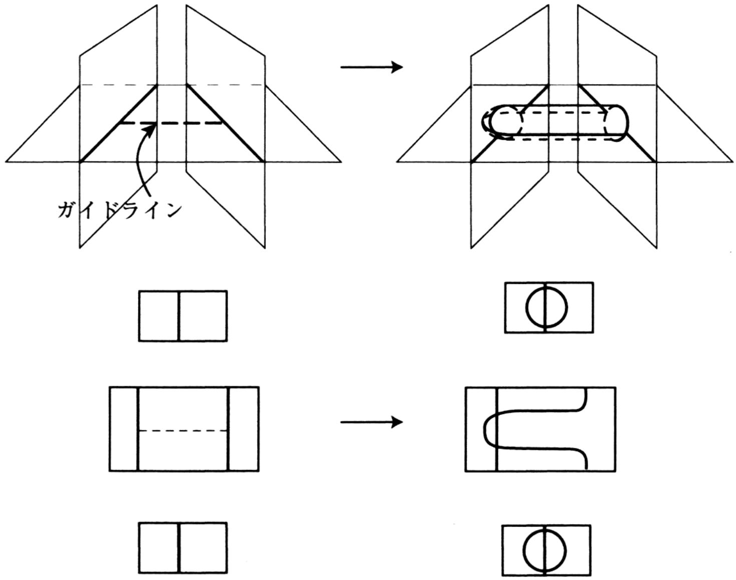


図 4.31

(III) は 2 重線をつなぎかえる変形です．斜線の ディスク (ガイドディスクとよびましょう) に沿って一方の面を押していき，入れ替えます．図 4.32 では角張って書いてありますが，これは見やすさのためです．

(IV) は今回の球面の裏返しでは用いませんが，図 4.33 のような 3 重点の入れ替えです．まっすぐな 3 つの平面がつくる図形が固定されていて，そこを斜めの平面が移動していくように考えるとわかりやすいかもしれません．

最後に (0)，これは $\boldsymbol{R}^3$ 全体をアイソトピーで動かす変形です．トポジカルには何もしない変形ですが，今回の裏返しでは重要な役割を果たします．

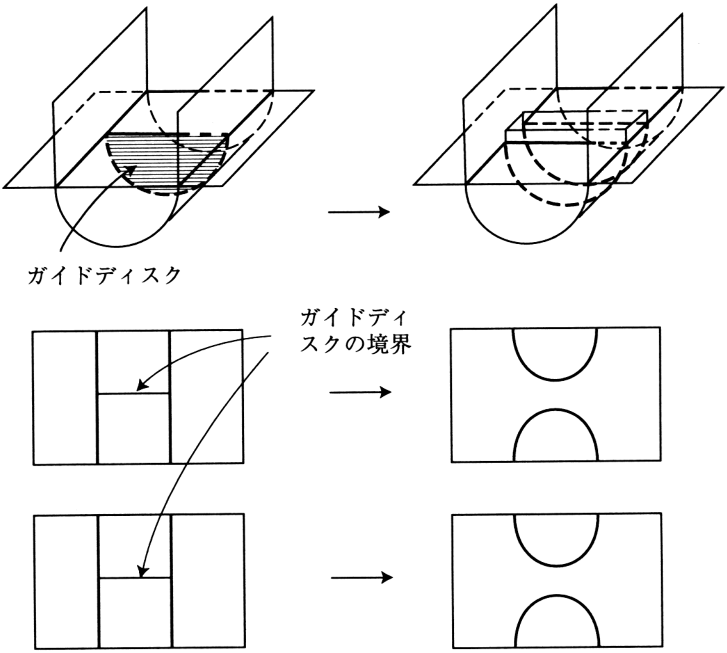


図 4.32

以上を準備として正則球面の裏返しを始めましょう．最初は南極に指をおいて上向きに押し上げ，(I) の変形をします（図 4.34）．

原像でいうと円周と同相な 2 重線が 2 つ発生しています．図 4.35 では 2 重線の貼り合わされるものに同じ名前 (ラベル) をつけています．矢印は，矢印が同じ方向になるように写ることを意味しています．

像を縦に 2 つに切った半分を見てみましょう．図 4.36 のようになっています．

つぎのステップではガイドライン (図 4.35 の点線) に沿って変形 (II) を行います．半分の図ですが図 4.36で見ると，P, Q の部分の外側に指を置いて曲面を押しつけ，交差させる操作になっています．変形後の球面は図 4.37 のようになっています．

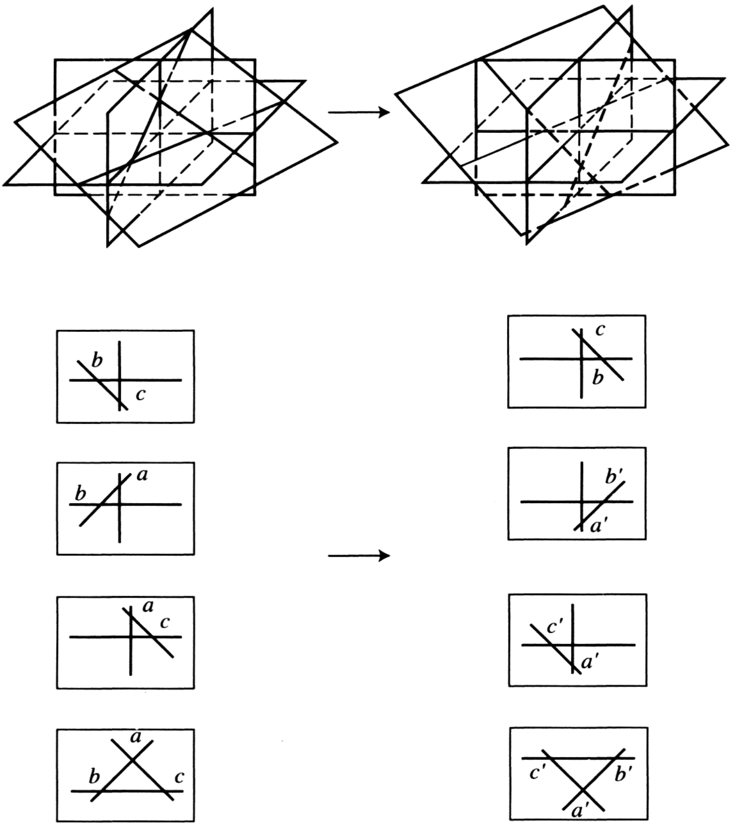


図 4.33

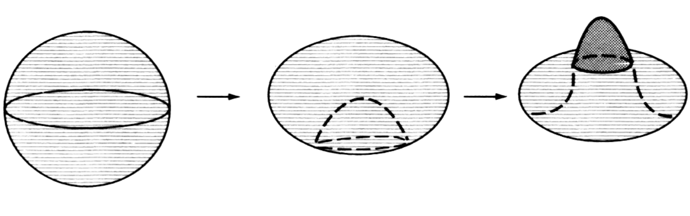


図 4.34

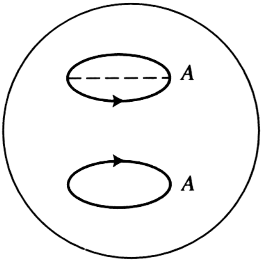


図 4.35

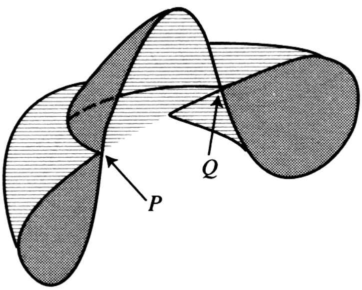


図 4.36

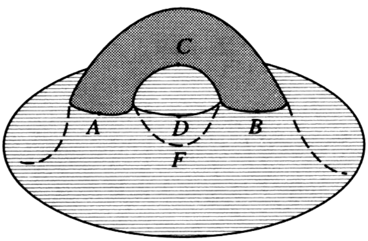


図 4.37

変形(II)を行ったときの原像の局所的変化は図 4.31 ですので，原像は図 4.38 のようになっています.

図 4.37 を下から見たのが図 4.39 です.

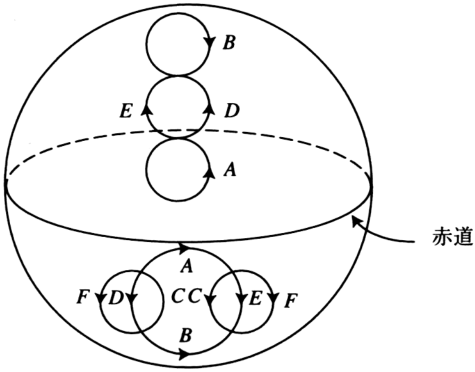


図 4.38

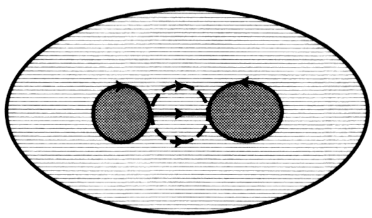


図 4.39

これだけではわかりにくいかもしれないので，部分に分けて見ましょう．原像を赤道と4辺形 $AEB^{-1}D^{-1}$(B^{-1} は逆向きに見た B を意味することにします) で切って，3つのパーツに分けたものをそれぞれ見たのが図 4.40 です．つぎが第3段階です．図 4.41 の2つのガイドディスクに沿って外側の面を押し込んで変形 (III) を2カ所で行います．この変形は複雑なのでよく見る必要があります.

原像の変形は局所的なので (III) の変形を図 4.42 の左図で考えます．図 4.42 の

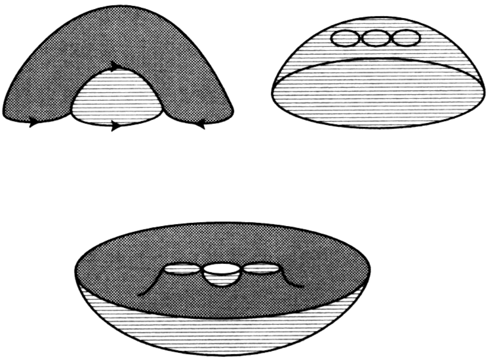


図 4.40

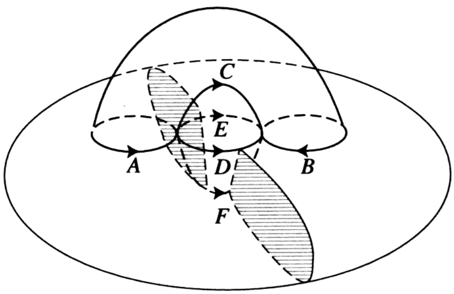


図 4.41

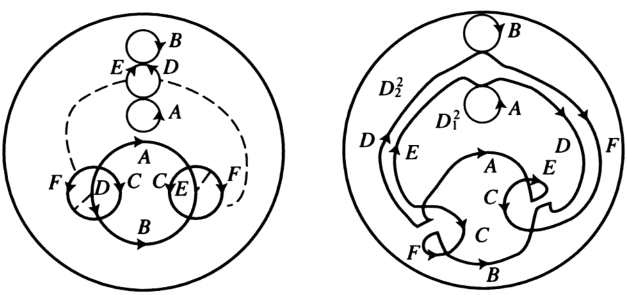


図 4.42

左図の点線がガイドディスクの境界です．これに図 4.32 の変形 (III) を行うと，変形後の原像は右図のようになるはずです (変化した部分のラベルは適当につけ直しました).

変形後の像は図 4.43 のようになっています.

これをパーツごとに見ると，$ACB^{-1}C^{-1}$ が囲む 4 辺形と A が囲む 1 辺形， B が囲む 1 辺形の像は変形でも変化せず，そのままです.

ただし，この像が 3 次元球の境界になっていて，内部に他の像がなく，外側からは赤が見えていることは注意しておいて下さい．これを赤球とよびましょう.

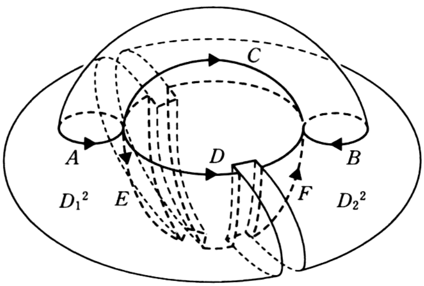


図 4.43

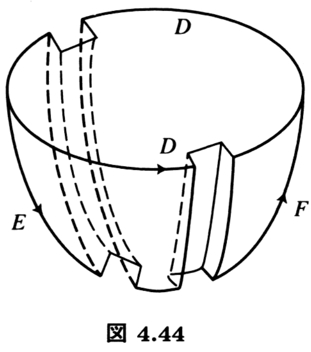


図 4.44

つぎに $DFD^{-1}E^{-1}$ が囲む 4 辺形と F が囲む 1 辺形， E が囲む 1 辺形の像ですが，図 4.44 のようになっています．やはり 3 次元球の境界になっていて，内部

に他の像がなく，外側からは青く見えます．これを青球とよびましょう．この2つの球体は2点で接触しています．

残りの原像は2つの(境界が点で貼り付いた)ディスクに分かれますが，その1方を D_1^2 (A を境界に含む方)とすると，この D_1^2 の像は 図 4.45 のようになっています．D_1^2 の境界の近傍の像は図 4.46 のようになっています．残りのディスク D_2^2 は D_1^2 を z–軸のまわりに 180 度回転したものになっています．

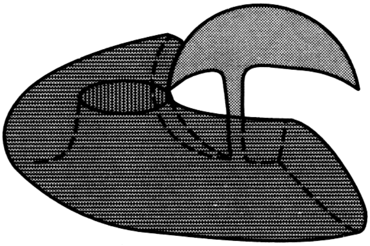


図 4.45

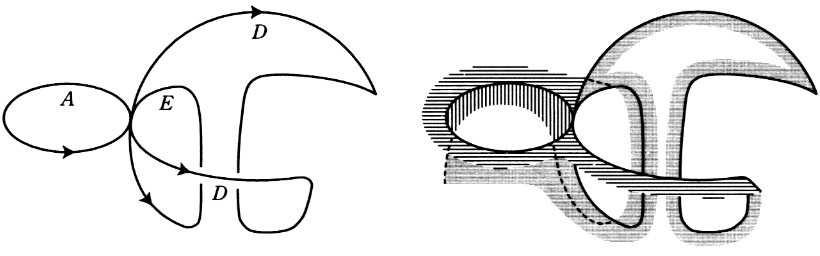


図 4.46

この像が全体としてきれいな対称性をもっていることに気がついたでしょうか．原像でいうと

$$A\longleftrightarrow F^{-1}, C\longleftrightarrow D^{-1}, B\longleftrightarrow E^{-1}$$

という対称性があります．じつはこの対称性は像を全体として固定する $\boldsymbol{R}^3$ のアイソトピーで実現されます．それを見ましょう．赤球と青球は2点で貼り付いているので図 4.47 のようになっています．

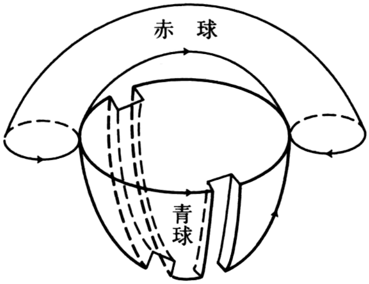


図 4.47

この図形に A, E がそれぞれ張る 2 つのディスクを境界の一部としてもつ球を貼り付けてやります．同様なことを B, F に行うと，図 4.48 のようなソリッドトーラス（円環体）ができます．図では見にくいので，赤球と青球以外の球面の像は書いていません．

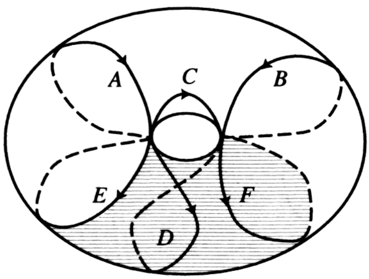


図 4.48

このとき図のソリッドトーラスを中心に沿って 180 度回転させ (このアイソトピーを h とします)，その後 $h(D)$ のひねりを消すようにメリディアンデスクのまわりに 180 度回転させたものは $\boldsymbol{R}^3$ のアイソトピーで実現できます (これを h' としましょう)．このアイソトピーで D_1^2 と D_2^2 の境界の近傍どうしは写り合うことがわかるので，ディスク全体も重ねるように写すことができます．この変形で，外

から見て青の部分と赤の部分が入れ替わっています．つまり図形としては同じものでも裏表がひっくり返っていることになります．後は以前やってきたステップを逆にたどれば，最後にでてくるのは裏返った球面になります．

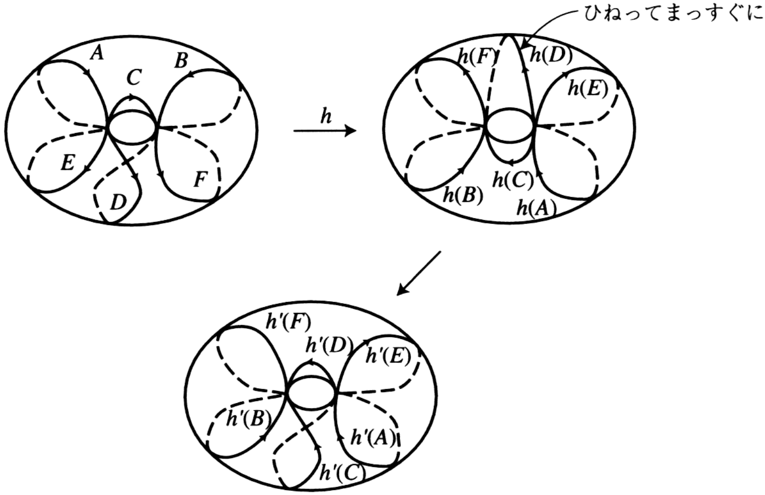


図 4.49

参考文献

[1] Nelson Max: 球面を裏返す．数学セミナー, 46–51, 1983 年 12 月，63–71, 1984 年 1 月

[2] Anthony Phillips: 球面を裏返す．数学セミナー, 7–18, 1966 年 12 月

[3] Stephan Smale: A Classification of Immersions of the Two–sphere., Transactions of the American Mathematical Society, **90**, 281–290 (1959)

[4] H. Whitney: On regular closed curves in the plain., Compositio Math., **4**, 276–284 (1937)

5

ハンドル分解

閉2次元多様体が，向き付け可能性とオイラー数によって分類されることはよく知られている．この分類を振り返ってみると，つぎの3つのプロセスによってなされていることがわかる ([1] 参照).

(1) 閉2次元多様体の表示方法を与える．

(2) 異なる2つの表示が定める多様体が互いに同相であるための条件を記述する．

(3) 表示の標準形を定め，すべての多様体がその標準形のいずれかによって一意的に表示されることを示す．

3次元多様体についても，その分類を幾何学的トポロジーの手法で攻略しようとすれば，基本的には2次元の場合と同様の筋道がまず考えられる．20世紀を通して，閉3次元多様体を幾何学的に表示する方法がさまざまに考案され，上の (2), (3) に相当する問題に向けて多くの研究がなされた．そして，サーストン (W. Thurston) の結果は（その手法は上に述べたものとは少々趣きが異なり微分幾何学的色彩が濃いものであるが），3次元多様体の分類問題の大きな部分に解答を与えるものかもしれない．しかしサーストンの強力な結果にもかかわらず，3次元ポアンカレ予想，すなわち

単連結な閉3次元多様体は3次元球面に同相か？

という問題が未解決のまま21世紀を迎かえようとしている ([2] 参照).

第7章では，3次元ポアンカレ予想に対して，新たな幾何学的トポロジーの手法によるアプローチが試みられる．この章で紹介する“ハンドル分解”は多様体を表示する古典的な方法で，第7章に展開される議論の基礎となるものである．

5.1 ハンドルとハンドル分解

D^i $(i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ で i-球，すなわち，

$$D^i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_i) \in \boldsymbol{R}^i \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_i^2 \leq 1\}$$

を表す．ただし，0-球 D^0 はただ1点からなる集合である．そして，$\mathbf{0}$ によって D^i の重心を表す．

(n, k)-**ハンドル**（または，n **次元の** k-**ハンドル**）$h^{(n,k)}$ とは，（k には関係なく）n-球に同相な多様体であって，同相写像 $f : D^k \times D^{n-k} \longrightarrow h^{(n,k)}$ が指定されたものをいう（以下では，同相写像 f は省略する）．(n, k)-ハンドル $h^{(n,k)} = D^k \times D^{n-k}$ に対し，その境界の一部である $\partial D^k \times D^{n-k}$ を $h^{(n,k)}$ の**接着面** (attaching tube) という．$(n, 0)$-ハンドルの接着面は $\emptyset$ （空集合）であり，(n, n)-ハンドルの接着面は境界全体となる．

***!* 注意 5.1**　この書の対象は主として 3 次元多様体であるので $(3, k)$-ハンドルのことを単に k-**ハンドル** とよぶ（次節以降では，話を 3 次元に限る）．

W を n-次元多様体とし，$h^{(n,k)}$ を (n, k)-ハンドルとする．このとき，W の境界 ∂W に $h^{(n,k)}$ をその接着面で貼り付けることによって新たな n-次元多様体 W' が得られる．このようにして構成される W' を “W に (n, k)-ハンドルを接着して得られる多様体” とよび，$W \cup h^{(n,k)}$ と表す．$h^{(n,k)}$ の境界の接着面以外の部分 $D^k \times \partial D^{n-k}$ は $W \cup h^{(n,k)}$ の境界の一部となる．

***!* 注意 5.2**　W に (n, k)-ハンドルを接着して得られる多様体 W' を実際に決定するためには，∂W のどの部分に $h^{(n,k)}$ の接着面を貼り付けるかを指定しなければならない．すなわち，接着面から ∂W への “ 接着写像 ” を指定しなければならない．しかし，この接着写像をそのたびごとに指定するのは煩わしいので，以下の記述では “ ハンドルの接着 ” は “ 接着写像が指定されたハンドルの接着 ” を意味するものとする．

■ **例 5.1** ■　2 次元円板に 図 5.1 のように $(2, 1)$-ハンドルを接着してアニュラスが得られる．

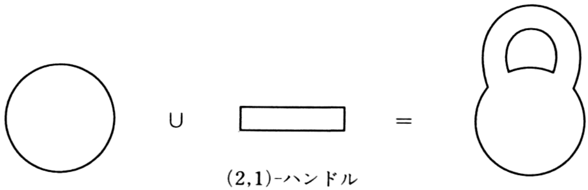


図 5.1

■ **例 5.2** ■ 2 次元円板に図 5.2 のように $(2,1)$-ハンドルを接着すればメビウス帯が得られる.

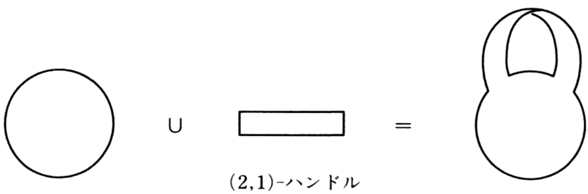


図 5.2

上の 2 つの例からわかるように, W が向き付け可能であるとき, W に $(n,1)$-ハンドルを接着した多様体は向き付け可能であるとは限らない. この書の対象は向き付け可能な 3 次元多様体であるので, 向き付け可能性が崩れるようなハンドルの接着は考えないこととし, 以下の議論では向き付け可能性を保存するようなハンドルの接着のみを考えることとする.

問題 5.1　$k \geq 2$ のとき, 向き付け可能な多様体 W に (n,k)-ハンドルを接着した多様体 W' もまた向き付け可能であることを示せ.

(ヒント：$k \geq 2$ ならば (n,k)-ハンドルの接着面が連結であることに注意.)

n-次元多様体 $M = M^n$ の **ハンドル分解** とは,

$$W_0 \subset W_1 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_j \subset W_{j+1} \subset \cdots \subset W_r = M$$

のような多様体の列でつぎの条件 (1), (2) を満たすもののことである．

(1) W_0 は1つの 0-ハンドル，すなわち n-球である．

(2) W_{j+1} は W_j に (n,k)-ハンドルを接着して得られる多様体である（k は各 j ごとに異なる）．

もちろん，多様体 M をハンドル分解する方法は一意的ではない．

■ **例 5.3** ■ n-球面

$$\boldsymbol{S}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

は，1つの $(n,0)$-ハンドル

$$W_0 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{S}^n \mid x_{n+1}^2 \leq 0\}$$

に (n,n)-ハンドル

$$h^{(n,n)} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{S}^n \mid x_{n+1}^2 \geq 0\}$$

を接着して得られる．したがって $\boldsymbol{S}^n$ は，

$$W_0 \subset W_1 \equiv W_0 \cup h^{(n,n)} = \boldsymbol{S}^n$$

というきわめて単純なハンドル分解をもつ．

■ **例 5.4** ■ （2次元トーラスのハンドル分解）

2次元トーラス $\boldsymbol{S}^1 \times \boldsymbol{S}^1$ は，つぎの図 5.3 に示すように，$(2,0)$-ハンドルに2つの $(2,1)$-ハンドルと1つの $(2,2)$-ハンドルを接着して得られる．

(n,k)-ハンドル $h^{(n,k)} = D^k \times D^{n-k}$ に対し，$D^k \times \{0\}$ を $h^{(n,k)}$ の**コア**（core），$\{0\} \times D^{n-k}$ をその**コ・コア**（co-core）とよぶ．また，コアの境界 $\partial D^k \times \{0\}$ は $h^{(n,k)}$ の**接着球面**（attaching sphere）といわれ，コ・コアの境界 $\{0\} \times \partial D^{n-k}$ は**ベルト球面**（belt sphere）といわれる．容易にわかるように，ひとつの (n,k)-ハンドルのコアとコ・コアは互いにただ1点で交わる．

k-ハンドル（$(3,k)$-ハンドル のこと）$h^k = D^k \times D^{3-k}$ のコア，コ・コアなど

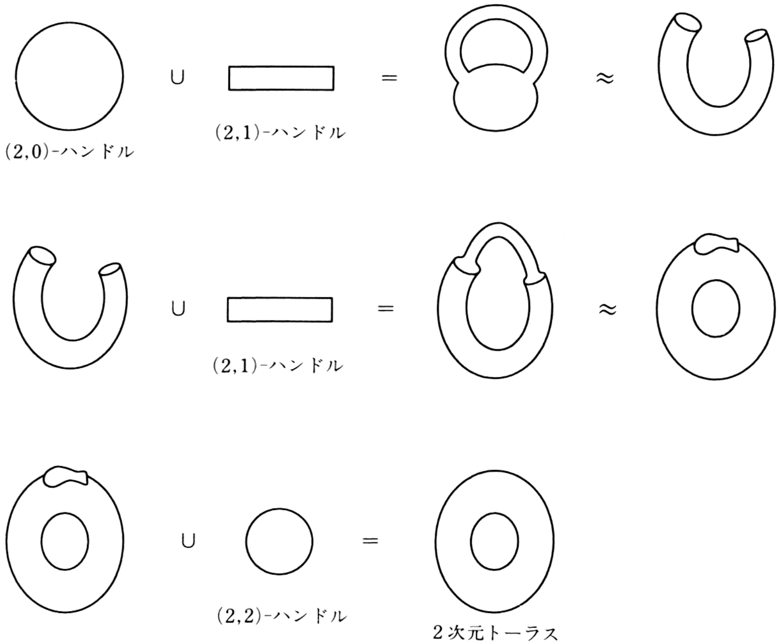


図 5.3

は 表 5.1 の通りである（図 5.4 も参照のこと）. この表（あるいは図）を見れば, 3 次元のハンドルにおいては 0-ハンドルと 3-ハンドルが, また 1-ハンドルと 2-ハンドルとが互いに双対的な関係にあることがわかるであろう.

上に定義した言葉を用いれば, “境界付き 3 次元多様体 W に k-ハンドル h^k ($k = 0, 1, 2, 3$) を接着する操作” をつぎのように説明することができる.

0-ハンドルの接着　W に 0-ハンドルを接着するとは, W に W とは交わらない 3-球を付け加えることである.

1-ハンドルの接着　W に 1-ハンドル $h^1 = D^1 \times D^2$ を接着するとは, つぎの (1), (2) の操作を行うことである.

(1) h^1 のコアである線分 ($D^1 \times \{\mathbf{0}\}$) を, その接着球面である 2 端点 ($\partial D^1 \times$

表 5.1 k-ハンドル h^k の コア，コ・コア，接着球面など

	$h^0 = D^0 \times D^3$	$h^1 = D^1 \times D^2$	$h^2 = D^2 \times D^1$	$h^3 = D^3 \times D^0$
コア	1 点	線分	2-球（ディスク）	3-球全体
接着球面	空集合	線分の 2 端点	円周	2-球面
接着面	空集合	2 つのディスク	アニュラス	2-球面
コ・コア	3-球全体	2-球（ディスク）	線分	1 点
ベルト球面	2-球面	円周	線分の 2 端点	空集合

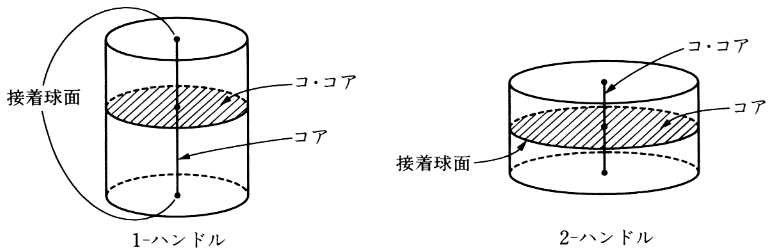


図 5.4

$\{\mathbf{0}\}$) で W の境界 ∂W に貼り付ける．

(2) 貼り付けた線分に 3 次元の厚みを付ける．

先に注意したように，1-ハンドルは向き付け可能性を保つように接着するものとする．また，1-ハンドルを接着した多様体の同相類は，上の (1) の操作で線分の両端点それぞれを接着する点を ∂W のどの連結成分に選ぶかによって決定される．

2-ハンドルの接着　W に 2-ハンドル $h^2 = D^2 \times D^1$ を接着するとは，つぎの (1), (2) の操作を行うことである．

(1) h^1 のコアであるディスク ($D^2 \times \{\mathbf{0}\}$) を，その接着球面である円周 ($\partial D^2 \times \{\mathbf{0}\}$) で W の境界 ∂W に貼り付ける．

(2) 貼り付けたディスクに 3 次元の厚みを付ける．

2-ハンドルを接着した多様体の同相類は，上の (1) の操作で接着球面が貼り付くべき ∂W 上の円周のアイソトピー類によって決定される．

3-ハンドルの接着　W に 3-ハンドルを接着するとは，W の境界 ∂W のある成分 F が 2-球面 S^2 と同相な場合に，この F と 3-球 D^3 の境界である 2-球面を貼り付けることによって W に D^3 を付け加える操作のことである．

5.2　3 次元多様体の三角形分割とハンドル分解

$M = M^3$ をコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体，K をその三角形分割とし，K に属する k-単体を σ_j^k $(j = 1, 2, \cdots, m_k,\ k = 0, 1, 2, 3)$ によって表す．この節では，“三角形分割 K から誘導されるハンドル分解” を定義する．

! 注意 5.3　任意の 3 次元多様体は三角形分割可能であるから，以下に定義されるハンドル分解によって，任意の 3 次元多様体がハンドル分解をもつことが示される．

まず，0-単体 σ_j^0 に対し，0-ハンドル h_j^0 を

$$h_j^0 = N(\sigma_j^0) \qquad (N(\cdot)\text{ は正則近傍})$$

と定め，3 次元多様体（連結とは限らない） W_j^0 を

$$W_j^0 = h_1^0 \cup h_2^0 \cup \cdots \cup h_j^0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_0)$$

と定義する．W_j^0 は確かに W_{j-1}^0 に 1 つの 0-ハンドル h_j^0 を接着した多様体となっている（この場合には，接着といっても交わらないように付け加えるだけである）．そして，これらの 0-ハンドル をすべて合わせたもの（すなわち $W_{m_0}^0$）を W_0^1 とおく．W_0^1 が m_0 個の互いに交わらない 3-球からなることは明らかであろう．

つぎに，1-単体 σ_j^1 に対し，1-ハンドル h_j^1 を

$$h_j^1 = \mathrm{cl}\,(N(\sigma_j^1) - W_0^1) \qquad (\mathrm{cl}\,(\cdot)\text{ は閉包})$$

と定め，3次元多様体 W_j^1 を

$$W_j^1 = W_0^1 \cup (h_1^1 \cup h_2^1 \cup \cdots \cup h_j^1) \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_1)$$

と定義する．このとき，W_j^1 は W_{j-1}^1 に1つの 1-ハンドル h_j^1 を接着したものになっている．この 1-ハンドル h_j^1 のコアは 1-単体 σ_j^1 （正確には $\mathrm{cl}(\sigma_j^1 - W_0^1)$）であり，コ・コアは σ_j^1 の重心において σ_j^1 に直交する小さなディスクである．

これらの 1-ハンドルをすべて接着した多様体（すなわち $W_{m_1}^1$）を W_0^2 とおき，W_0^2 に接着する 2-ハンドル h_j^2 をつぎのように定める．すなわち，2-単体 σ_j^2 に対して

$$h_j^2 = \mathrm{cl}(N(\sigma_j^2) - W_0^2)$$

と h_j^2 を定義する．実際，W_j^2 を

$$W_j^2 = W_0^2 \cup (h_1^2 \cup h_2^2 \cup \cdots \cup h_j^2) \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_2)$$

と定めれば，W_j^2 は W_{j-1}^2 に1つの 2-ハンドル h_j^2 を接着して得られる多様体となっている．この 2-ハンドル h_j^2 のコアは 2-単体 σ_j^2 （正確には $\mathrm{cl}(\sigma_j^2 - W_0^1)$），コ・コアは σ_j^2 の重心において σ_j^2 に直交する短い線分である．

2-ハンドル h_j^2 をすべて接着したもの（すなわち $W_{m_2}^2$）を W_0^3 とおき，これに接着する 3-ハンドル h_j^3 を，3-単体 σ_j^3 に対して

$$h_j^3 = \mathrm{cl}(N(\sigma_j^3) - W_0^3)$$

と定義する．さらに，W_j^3 を

$$W_j^3 = W_0^3 \cup (h_1^3 \cup h_2^3 \cup \cdots \cup h_j^3) \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_3)$$

と定めれば，W_j^3 は W_{j-1}^3 に1つの 3-ハンドル h_j^3 を接着して得られる多様体である．そして，これらの 3-ハンドルをすべて接着すれば元の多様体 M が得られる．すなわち，上に定めた多様体の列 W_j^k は，M のハンドル分解

$$\begin{aligned} W_1^0 \subset W_2^0 \subset \cdots \subset W_{m_0}^0 \equiv W_0^1 \subset W_1^1 \subset W_2^1 \subset \cdots \subset W_{m_1}^1 \equiv W_0^2 \\ \subset W_1^2 \subset W_2^2 \subset \cdots \subset W_{m_2}^2 \equiv W_0^3 \subset W_1^3 \subset W_2^3 \subset \cdots \subset W_{m_3}^3 \equiv M \qquad (5.1) \end{aligned}$$

を与える．このハンドル分解を 三角形分割 K から誘導される M のハンドル分解という．

M が閉多様体の場合には，三角形分割 K は，上に定義した (5.1) のほかに，つぎに定義する (5.1) の **双対ハンドル分解** とよばれれる分解を定める．この双対ハンドル分解においては，まず

$$\hat{h}_j^0 \equiv h_j^3 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_3)$$

とする．すなわち，ハンドル分解 (5.1) において最後の段階で接着される 3-ハンドルたちを 0-ハンドルとみなし，これにハンドルを接着することによって，M のハンドル分解を構成していく．実際，

$$\widehat{W}_j^0 = \hat{h}_1^0 \cup \hat{h}_2^0 \cup \cdots \cup \hat{h}_j^0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_3)$$

と $\widehat{W}_j^0$ を定めれば，$\hat{h}_j^0$ は $\widehat{W}_{j-1}^0$ に接着される 0-ハンドルとみなすことができる．

つぎに，これらの 0-ハンドルをすべて接着したもの（すなわち，$\widehat{W}_{m_3}^0$ ）を $\widehat{W}_0^1$ とおき，これに接着する 1-ハンドル $\hat{h}_j^1$ を

$$\hat{h}_j^1 \equiv h_j^2 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_2)$$

と定める．ここで，h_j^2 は，ハンドル分解 (5.1) における 2-ハンドルである．そして，$\widehat{W}_j^1$ を

$$\widehat{W}_j^1 = \widehat{W}_0^1 \cup (\hat{h}_1^1 \cup \hat{h}_2^1 \cup \cdots \cup \hat{h}_j^1) \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_2)$$

と定義する． M を閉多様体としているから，$\hat{h}_j^1$ の $\widehat{W}_{j-1}^1$ に接着される部分はハンドル分解 (5.1) の 2-ハンドル h_j^2 の非接着境界全体，すなわち 2 つのディスクである．したがって，$\hat{h}_j^1$ を $\widehat{W}_{j-1}^1$ に接着される 1-ハンドルと見ることができる（表 5.1 参照）．

これらの 1-ハンドル $\hat{h}_j^1$ をすべて接着したもの（すなわち $\widehat{W}_{m_2}^1$ ）を $\widehat{W}_0^2$ とおき，これに接着する 2-ハンドル $\hat{h}_j^2$ を

$$\hat{h}_j^2 \equiv h_j^1 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_1)$$

と定める．ここで，h_j^1 は，ハンドル分解 (5.1) における 1-ハンドルである．そし

て，$\widehat{W}_j^2$ を

$$\widehat{W}_j^2 = \widehat{W}_0^2 \cup (\hat{h}_1^2 \cup \hat{h}_2^2 \cup \cdots \cup \hat{h}_j^2) \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_1)$$

と定義する．M が閉多様体であることから，$\hat{h}_j^2$ の $\widehat{W}_{j-1}^2$ に接着される部分はハンドル分解 (5.1) の 1-ハンドル h_j^1 の非接着境界全体，すなわち 1 つのアニュラスである．したがって，$\hat{h}_j^2$ を $\widehat{W}_{j-1}^2$ に接着される 2-ハンドルと見ることができる（表 5.1 参照）．

これらの 2-ハンドル $\hat{h}_j^2$ をすべて接着したもの（すなわち $\widehat{W}_{m_1}^2$ ）を $\widehat{W}_0^3$ とおき，これに接着する 2-ハンドル $\hat{h}_j^3$ を

$$\hat{h}_j^3 \equiv h_j^0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_0)$$

と定め（ h_j^0 は，ハンドル分解 (5.1) における 0-ハンドル），さらに $\widehat{W}_j^2$ を

$$\widehat{W}_j^2 = \widehat{W}_0^2 \cup (\hat{h}_1^2 \cup \hat{h}_2^2 \cup \cdots \cup \hat{h}_j^2) \qquad (j = 1, 2, \cdots, m_1)$$

と定義する．M が閉多様体であることから，$\hat{h}_j^3$ が $\widehat{W}_{j-1}^3$ に接着される 3-ハンドルであることがわかり，M のハンドル分解

$$\begin{aligned}\widehat{W}_1^0 \subset \widehat{W}_2^0 \subset \cdots \subset \widehat{W}_{m_3}^0 \equiv \widehat{W}_0^1 \subset \widehat{W}_1^1 \subset \widehat{W}_2^1 \subset \cdots \subset \widehat{W}_{m_2}^1 \equiv \widehat{W}_0^2 \\ \subset \widehat{W}_1^2 \subset \widehat{W}_2^2 \subset \cdots \subset \widehat{W}_{m_1}^2 \equiv \widehat{W}_0^3 \subset \widehat{W}_1^3 \subset \widehat{W}_2^3 \subset \cdots \subset \widehat{W}_{m_0}^3 \equiv M \qquad (5.2)\end{aligned}$$

を得る．このハンドル分解 (5.2) を (5.1) の双対ハンドル分解という．

ハンドル分解 (5.1) の k-ハンドル h_j^k $(k = 0, 1, 2, 3)$ を，双対ハンドル分解 (5.2) においては $(3-k)$-ハンドル $\hat{h}_j^{3-k}$ とみなした．ここで，h_j^k のコアは $\hat{h}_j^{3-k}$ のコ・コアであり，h_j^k のコ・コアは $\hat{h}_j^{3-k}$ のコアとなっていることに注意しておく．

5.3　ハンドルのキャンセル

3-球面 S^3 は，例 5.1 に示したように

$$W_0 = h^0\,, \quad S^3 = W_0 \cup h^3$$

というきわめて単純なハンドル分解をもつ．一方，S^3 を三角形分割し，その三角形分割から前節の方法で構成されるハンドル分解を考えると，これはかなり複雑なものになってしまう．このことは，三角形分割から定まるハンドル分解にかなりのムダがあることを想像させる．そこでこの節では，どのような条件の下に，与えられたハンドル分解から，より単純なハンドル分解が得られるかを検討する．

$M=M^3$ を3次元多様体とし，

$$W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_j \subset W_{j+1} \subset W_{j+2} \subset \cdots \subset W_r = M \tag{5.3}$$

をそのハンドル分解とする．ここで，連続する3つの多様体 W_j, W_{j+1}, W_{j+2} がつぎの条件 (a), (b) を満たしている場合を考える (図 5.5 参照).

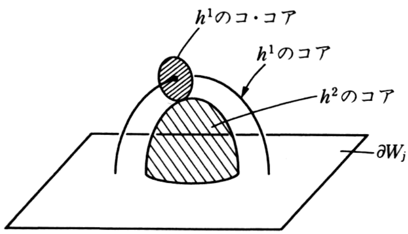


図 5.5

(a) $W_{j+1} = W_j \cup h^1$, $W_{j+2} = W_{j+1} \cup h^2$, すなわち，$W_{j+1}$ は W_j に 1-ハンドル h^1 を接着して得られ，W_{j+2} は W_{j+1} に 2-ハンドル h^2 を接着して得られる．

(b) 上の 1-ハンドル h^1 のコ・コアと，2-ハンドル h^2 のコアは互いにただ1点で交わる．

このとき，条件 (b) によって $h^1 \cup h^2$ は3-球に同相であって，しかも $W_j \cap (h^1 \cup h^2)$ はディスクとなる．したがって，W_{j+2} は W_j の境界に3-球を1つのディスクで貼り付けたもの (いわば，W_j に“たんこぶ”を付けたもの) で，これは W_j に同相である．このことは，条件 (a), (b) が満たされているときには，M のハンド

ル分解として，2つのハンドルを省略した

$$W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_j \subset W_{j+3} \subset \cdots \subset W_r = M$$

という分解がとれることを示している．上の条件 (a), (b) を満たす 1-ハンドル h^1 と 2-ハンドル h^2 を**キャンセル対** (cancelling pair) という．

与えられたハンドル分解 (5.3) がキャンセル対をもたなくとも，ハンドルの接着の順序を変更することによって，キャンセル対をもつハンドル分解が得られることもある．また，キャンセル対以外にも分解を簡略化できることがある．たとえば，W_j, W_{j+1}, W_{j+2} がつぎの条件 (c), (d) を満たす場合がその例である．

(c) $W_{j+1} = W_j \cup h^0$, $W_{j+2} = W_{j+1} \cup h^1$.

(d) W_{j+1} に接着される 1-ハンドル h^1 のコアの端点の一方は ∂W_j 上にあり，他方は W_j に接着された 0-ハンドル h^0 の境界上にある．

問題 5.2 ハンドル分解 (5.3) において，W_j, W_{j+1}, W_{j+2} が上の条件 (c), (d) を満たすとき，W_{j+2} は W_j と同相で，M のハンドル分解として W_{j+1}, W_{j+2} を省略した分解がとれることを示せ．

5.4 ハンドル体とヘゴール分解

5.2 節において，三角形分割から誘導されるハンドル分解を定義し，前節ではハンドルのキャンセルによってより単純なハンドル分解に移行できる場合もあることを説明した．この節では，ハンドル分解をより効率良く扱う方法を考える．そのためにまず，**ハンドル体**というものを定義する．

3-球に同相な多様体 W_0 に g 個の 1-ハンドル h_j^1 $(j = 1, 2, \cdots, g)$ を接着して得られる 3 次元多様体

$$V_g = W_0 \cup (h_1^1 \cup h_2^1 \cup \cdots \cup h_g^1), \tag{5.4}$$

あるいは，この V_g と同相な多様体を**種数 g のハンドル体**という（3-球は，種数 0 のハンドル体である）．V_g の境界 ∂V_g が種数 g の閉曲面であることを見るのは容易であろう．

! 注意 5.4　一般次元の場合には，“ハンドル体” という言葉は，“ハンドル分解の構造を付与された多様体” を表す言葉として使われることもある．しかし，3次元多様体を論ずる場合には，“ハンドル体” という言葉を上に定義したように使用するのが通例のようである．

ハンドル体 V_g に対して，つぎの (1), (2) を満たす単純閉曲線 m を V_g の**メリディアン** (meridian) という．

(1) $m \subset \partial V_g$ （すなわち，m は境界上の単純閉曲線）．

(2) V_g 内に埋め込まれた（2次元）ディスク D で，つぎの (a), (b), (c) を満たすものが存在する．

(a) $m = \partial D$，　(b) $\mathrm{Int}\,(D) \subset \mathrm{Int}\,(V_g)$，　(c) $V_g - D$ は連結．

メリディアン m に対して，上の (1), (2) を満たすディスク D のことを（m に対応する）**メリディアンディスク** (meridian disk) とよぶ．ハンドル体 V_g の2つのメリディアンディスク D, D' （または，2つのメリディアン $m = \partial D$, $m' = \partial D'$ ）が互いに **同値** であるとは，D と D' が互いに V_g のアンビアントアイソトピーで移り合うことをいう．

■ **例 5.5** ■　V_g が (5.4) のように表示されるとすると，1-ハンドル h_j^1 のコ・コア（これを D_j で表す）は，V_g の1つのメリディアンディスクである．

この D_j を “1-ハンドル h_j^1 のメリディアンディスク”，また，∂D_j を “1-ハンドル h_j^1 のメリディアン” とよぶこともある．

■ **例 5.6** ■　(5.4) のように表示されるハンドル体 V_g のメリディアンは上に示した $m_j \equiv \partial D_j$ に同値なものばかりではない．たとえば，m_i と m_j $(i \neq j)$ を図 5.6 に示すように ∂V_g 上の帯で結んで得られる単純閉曲線も V_g のメリディアンである．

さてここで，前節で定めた3次元多様体 M のハンドル分解 (5.1) において，すべての 1-ハンドルを接着し終わった多様体 $H_1 \equiv W_0^2$ がハンドル体であることを示そう．これを見るために，1-ハンドルを接着する順序を少々工夫する．

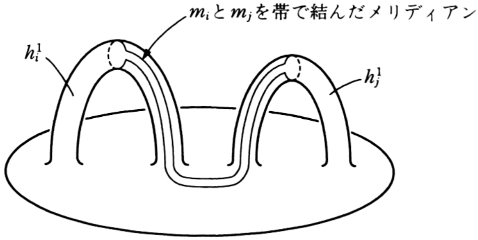


図 5.6

まず，ハンドル分解 (5.1) を定義するために用いた三角形分割 K の 1-スケルトン G を考える．G は 0-単体 σ_j^0 $(j=1,2,\cdots,m_0)$ と 1-単体 σ_j^1 $(j=1,2,\cdots,m_1)$ からなる図形である．したがって，0-単体を頂点，1-単体を辺と考えれば，G を 1 つのグラフとみなすことができる．グラフ G の極大木（すべての頂点を含む G の連結部分グラフで，サイクルを含まないもの）T を 1 つ選び，T に“含まれない” 1-単体を

$$\sigma_1^1,\ \sigma_2^1,\ \cdots,\ \sigma_g^1$$

とし，T に“含まれる” 1-単体を

$$\sigma_{g+1}^1,\ \sigma_{g+2}^1,\ \cdots,\ \sigma_{m_1}^1$$

とする．そして，すべての 0-ハンドル h_j^0 $(j=1,2,\cdots,m_0)$ と，極大木 T に“含まれる” 1-単体に対応する 1-ハンドルを接着した多様体

$$W_0 \equiv (h_1^0 \cup h_2^0 \cup \cdots \cup h_{m_0}^0) \cup (h_{g+1}^1 \cup h_{g+2}^1 \cup \cdots \cup h_{m_1}^1) \tag{5.5}$$

を考えると，この W_0 は 3-球に同相である．実際，つぎの 3 つのことを考え合わせれば W_0 が 3-球に同相であることが容易に確かめられる．

(1) 2 つの 3-球を 1 つの 1-ハンドルで結んだものは 3-球に同相である．

(2) T が木（サイクルを含まない）であるから，各 1-ハンドル h_{g+i}^1 $(g+1 \leq g+i \leq m_1)$ を接着する操作は，異なる連結成分を結ぶ操作である．

(3) T が極大木（すべての頂点を結ぶ）であるから，W_0 は連結な多様体である．

今われわれが考えている多様体 $H_1 \equiv W_0^2$ は，上の (5.5) に定義された 3-球に同相な多様体 W_0 に g 個の 1-ハンドルを接着した多様体として

$$H_1 = W_0 \cup (h_1^1 \cup h_2^1 \cup \cdots \cup h_g^1)$$

と表される．したがって，この H_1 はハンドル体である．

M が閉多様体の場合を考えると，双対ハンドル分解 (5.2) において 1-ハンドルの接着が終了した多様体 $H_2 \equiv \widehat{W_0^2}$ もまたハンドル体であることが，H_1 の場合とまったく同様にして示される．さらに，ハンドル分解 (5.1) および双対ハンドル分解 (5.2) の構成の仕方から，

$$M = H_1 \cup H_2 \,, \quad H_1 \cap H_2 = \partial H_1 = \partial H_2 \tag{5.6}$$

が成り立つことがわかる．このことから，2 つのハンドル体 H_1, H_2 の種数は互いに等しいことも導かれる．

一般に，向き付け可能閉 3 次元多様体 M が (5.6) を満たす 2 つのハンドル体 H_1, H_2 に分解されるとき，この 2 つのハンドル体の組 $\mathcal{H} = (H_1, H_2)$ を M の**ヘゴール分解**（Heegaard splitting）といい，H_1（あるいは，H_2）の種数のことをヘゴール分解 $\mathcal{H}$ の**種数**という．ヘゴール分解は，閉 3 次元多様体のハンドル分解を効率良く表現したものとも考えられる．

上に示したことから，つぎの命題が成り立つことがわかる．

【命題 5.1】 任意の向き付け可能閉 3 次元多様体 M はヘゴール分解をもつ．

■ **例 5.7** ■ 例 5.1 に示した 3-球面 S^3 のハンドル分解 $S^3 = h^0 \cup h^3$（S^3 を 0-ハンドル h^0 に 3-ハンドル h^3 を接着したものとして表現したハンドル分解）は，$H_1 \equiv h^0$, $H_2 \equiv h^3$ として，種数 0 のヘゴール分解 $\mathcal{H} = (H_1, H_2)$ を与えている．

したがって，S^3 は種数 0 のヘゴール分解をもつ．

問題 5.3 向き付け可能閉 3 次元多様体 M が種数 0 のヘゴール分解をもつならば，M は 3-球面 $\boldsymbol{S}^3$ に同相であることを示せ．

■ **例 5.8** ■ 3-球面 $\boldsymbol{S}^3$ を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^3 &= \{(z_1, z_2) \in \boldsymbol{C}^2 \mid |z_1| = |z_2| = 1\} \\ &= \{(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \mid r_1^2 + r_2^2 = 1 \ (r_1, r_2 \in \boldsymbol{R}),\ \theta_1, \theta_2 \in \boldsymbol{R}\}\end{aligned}$$

のように表すこともできる．この表示を用いて，$H_j \subset \boldsymbol{S}^3$ $(j = 1, 2)$ を

$$H_1 = \left\{(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \mid r_1^2 + r_2^2 = 1,\ 0 \leq r_1 \leq \frac{1}{2},\ \theta_1, \theta_2 \in \boldsymbol{R}\right\}$$

$$H_2 = \left\{(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \mid r_1^2 + r_2^2 = 1,\ \frac{1}{2} \leq r_1 \leq 1,\ \theta_1, \theta_2 \in \boldsymbol{R}\right\}$$

と定めれば，$\mathcal{H} = (H_1, H_2)$ は $\boldsymbol{S}^3$ の種数 1 のヘゴール分解を与える．

問題 5.4 例 5.8 の分解が，実際に種数 1 のヘゴール分解であることを示せ．

種数 1 のヘゴール分解をもつ向き付け可能閉 3 次元多様体はすべて分類されており，それらは $\boldsymbol{S}^3$, $\boldsymbol{S}^2 \times \boldsymbol{S}^1$ とレンズ空間 $L(p, q)$ である．レンズ空間については 第 2 章 に述べてある．

問題 5.5 $\mathcal{H} = (H_1, H_2)$ は閉 3 次元多様体 M の種数 g のヘゴール分解であるとし，D_1, D_2 はそれぞれ H_1 および H_2 のメリディアンディスクであるとする．さらに ∂D_1 と ∂D_2 が $\partial H_1 = \partial H_2$ 上ただ 1 点で交わるとする．このとき，

$$H_1' = H_1 \cup N(D_2), \quad H_2' = \mathrm{cl}(M - H_1')$$

と定義すれば，$\mathcal{H}' = (H_1', H_2')$ は M の種数 $g-1$ のヘゴール分解であることを示せ．

(ヒント：$\partial D_1 \cap \partial D_2$ が 1 点であるときには，$N(D_1 \cup D_2)$ が 3-球に同相であることに注意されたい．)

5.5　モース関数とハンドル分解

この節では，“可微分関数の臨界点” という少々解析的な道具を用いて，多様体のハンドル分解を考える．このような理論は **モース理論**（Morse theory）とよばれている．モース理論は，有限次元の多様体ばかりでなく無限次元の多様体をも扱う幅広い理論であるが，ここでは本書の目的に合わせて，対象を閉 3 次元多様体に限る．また，この節のほとんどの定理は証明を与えられないが，それらの定理の証明については [3] を参照してほしい．

M を閉 3 次元可微分多様体，$f : M \to \boldsymbol{R}$ は M 上の滑らかな（C^∞-級の）関数とする．各点 $p \in M$ の近傍では，局所座標系 (x_1, x_2, x_3) によって，f は 3 変数関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ として表される．

点 $p_0 \in M$ が関数 f の **臨界点**（critical point）であるとは，p_0 のまわりの局所座標系 (x_1, x_2, x_3) について，

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_3}(p_0) = 0 \tag{5.7}$$

が成り立つことをいう．この臨界点の定義は，局所座標系の選び方にはよらない．実際，(y_1, y_2, y_3) を p_0 のまわりの他の座標系とすると

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y_1}(p_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_2}(p_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_3}(p_0) \end{pmatrix} = J(p_0) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(p_0) \end{pmatrix}$$

の関係がある．ここで，$J(p_0)$ は (y_1, y_2, y_3) から (x_1, x_2, x_3) への座標変換の **ヤコビ行列**（Jacobian matrix）で，具体的には，

$$J(p_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}(p_0) & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2}(p_0) & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_3}(p_0) \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1}(p_0) & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}(p_0) & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_3}(p_0) \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial y_1}(p_0) & \dfrac{\partial x_3}{\partial y_2}(p_0) & \dfrac{\partial x_3}{\partial y_3}(p_0) \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

で与えられる正則行列である．

関数 $f: M \to \boldsymbol{R}$ と実数 c に対し，$f^{-1}(c)$ によって，c の逆像，すなわち

$$f^{-1}(c) = \{p \in M \mid f(p) = c\}$$

を表す．$f^{-1}(c)$ を値 c の **レベル集合** とよぶこともある．

実数 c が関数 $f: M \to \boldsymbol{R}$ の **臨界値**（critical value）であるとは，レベル集合 $f^{-1}(c)$ 上に臨界点が存在することをいう．臨界値 c が **単純** であるとは，$f^{-1}(c)$ 上の臨界点がただ 1 点だけであることをいう．また，単純な臨界値に対応する臨界点を **単純な臨界点** という．臨界値ではない値 $c \in \boldsymbol{R}$ については，陰関数定理からつぎの定理が導かれる．

【定理 5.2】　M を 3 次元閉多様体，$f: M \to \boldsymbol{R}$ を滑らかな関数とし，$c \in \boldsymbol{R}$ は f の臨界値ではないとする．さらに，$f^{-1}(c) \neq \emptyset$（すなわち，c が f の値域にはいっている）とする．このとき，レベル集合 $f^{-1}(c)$ は，閉 2 次元多様体（連結とは限らないが各成分は閉曲面）である．

臨界点の非退化性・退化性を定義するために，ヘッセ行列（Hessian matrix）といわれる行列を導入する．可微分関数 $f: M \to \boldsymbol{R}$ に対して，行列

$$H_f(p_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(p_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(p_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(p_0) \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

を，関数 f の点 p_0 における **ヘッセ行列** という．滑らかな関数 f については，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p_0)$$

が成り立つから，ヘッセ行列 $H_f(p_0)$ は対称行列である．したがって，$H_f(p_0)$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ はすべて実数であることに注意しておく．

【定義 5.3】 f を M 上の可微分関数，$p_0 \in M$ を f の臨界点とする．ヘッセ行列 $H_f(p_0)$ の行列式 $\det H_f(p_0)$ が 0 でないとき，p_0 を **非退化な臨界点** とよび，$\det H_f(p_0) = 0$ であるとき，p_0 を **退化した臨界点** とよぶ．

上の臨界点の非退化あるいは退化の定義が局所座標系の選び方によらないことは，別の局所座標系 (y_1, y_2, y_3) に関するヘッセ行列を $\widehat{H}_f(p_0)$ とするとき，もとの局所座標系 (x_1, x_2, x_3) に関するヘッセ行列 $H_f(p_0)$ と $\widehat{H}_f(p_0)$ の間に

$$\widehat{H}_f(p_0) = {}^tJ(p_0)H_f(p_0)J(p_0) \tag{5.10}$$

の関係があることから導かれる．ここで，$J(p_0)$ は (5.8) に定義されたヤコビ行列である．非退化な臨界点 p_0 においては，ヘッセ行列 $H_f(p_0)$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ はすべて 0 とは異なる実数となっていることに注意しておく．

【定義 5.4】（モース関数） 可微分関数 $f : M \to \boldsymbol{R}$ が **モース関数**（Morse function）であるとは，f の臨界点がすべて非退化で単純な臨界点であることである．

モース関数の存在について，つぎの定理が知られている．

【定理 5.5】 M を閉多様体，$g : M \to \boldsymbol{R}$ を M 上の任意の可微分関数とすると，g にいくらでも近いモース関数 $f : M \to \boldsymbol{R}$ が存在する．

関数 $f : M \to \boldsymbol{R}$ に対し，$W_f(c)$ を

$$W_f(c) = \{p \in M \mid f(p) \leq c\} \tag{5.11}$$

と定めれば，この $W_f(c)$ はレベル集合 $f^{-1}(c)$ を境界とする M の部分集合であって，$c_1 < c_2$ のとき $W_f(c_1) \subset W_f(c_2)$ である．定理 5.5 から，臨界値ではない $c \in \boldsymbol{R}$ に対しては，$W_f(c)$ がコンパクトな 3 次元多様体であることがわかる．さらに，区間 $[c_1, c_2]$ が f の臨界値を含まない場合には，f の勾配ベクトル $\operatorname{grad} f = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \partial f/\partial x_3)$ に沿うアンビアントアイソトピーによっ

て $W_f(c_1)$ を $W_f(c_2)$ に変形することができる．したがって，つぎの命題が成り立つ．

【命題 5.6】 区間 $[c_1, c_2]$ が $f: M \to \boldsymbol{R}$ の臨界値を含まなければ，$W_f(c_1)$ と $W_f(c_2)$ は互いに M のアンビアントアイソトピーで移り合う多様体である．

この命題は f の臨界値の前後で $W_f(c)$ がどのように変化するかを決定することにより，M の構造を定めることができることを示している（c_{max} を関数 f の最大値とすれば，$W_f(c_{max}) = M$ であることに注意されたい）．以下では，モース関数 $f = M \to \boldsymbol{R}$ について，臨界値の前後での多様体の変化がどのように決定されるかを説明する．まず，非退化臨界点の指数を定義する．

【定義 5.7】（非退化な臨界点の指数）可微分関数 $f: M \to \boldsymbol{R}$ の非退化な臨界点 p_0 の **指数**（index）とは，ヘッセ行列 $H_f(p_0)$ の "負の固有値の個数" のことである．この指数を $\mathrm{ind}(p_0)$ で表す．

f がモース関数のときには，臨界点はすべて非退化で単純であるからから，この指数を "臨界値 $c = f(p_0)$ の指数" とよぶこともある．

関係式 (5.10) から，指数の定義が局所座標系の選び方によらないことがわかる．また，定義から明らかなように，非退化臨界点の指数は非負整数で，M が 3 次元多様体の場合には，0, 1, 2, 3 のいずれかである．とくに，モース関数の最大値 c_{max} は指数 3 の臨界値であり，最小値 c_{min} は指数 0 の臨界値である．モース関数の臨界値の前後での多様体の変化を決定するための基礎となるのがつぎの定理である．

【定理 5.8】（モースの補題）点 p_0 を $f: M \to \boldsymbol{R}$ の非退化な臨界点とし，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をヘッセ行列 $H_f(p_0)$ の固有値とする[1]．このとき，p_0 のまわりの局所座標系 (X_1, X_2, X_3) をうまく選べば，その座標系によって f をつ

1)　$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ として一般性を失わないので，以下の議論ではこれを仮定する．

ぎの標準形に表すことができる．

$$f = \operatorname{sgn}(\lambda_1)\cdot X_1^2 + \operatorname{sgn}(\lambda_2)\cdot X_2^2 + \operatorname{sgn}(\lambda_3)\cdot X_3^2 + c, \tag{5.12}$$

ただし，c は定数（$= f(p_0)$）であり，$\operatorname{sgn}(\lambda_i)$ は固有値 λ_i の符号，すなわち

$$\operatorname{sgn}(\lambda_i) = \begin{cases} +1 & (\lambda_i > 0) \\ -1 & (\lambda_i < 0) \end{cases}$$

である．また，局所座標系 (X_1, X_2, X_3) において，点 p_0 は原点 $(0,0,0)$ である．

以下では，$f : M \to \boldsymbol{R}$ を閉3次元多様体 M 上のモース関数とし，f が定める M のハンドル分解について述べる．

モース関数 f は $(r+1)$ 個の臨界点 $p_0, p_1, p_2, \cdots, p_r$ をもつとし，各臨界点における値，すなわち臨界値を $c_i = f(p_i)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, r)$ とする．臨界値はすべて異なる値であるから，$c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_r$ と臨界値の大きさの順に番号が付けられているとしてよい（c_0 は f の最小値，c_r は f の最大値である）．定理5.5によれば，臨界点 p_i において f を標準化する局所座標系 (X_1, X_2, X_3) を選べば，f は p_i のまわりではつぎの4つの場合のどれか1つとして表される．

$$f = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + c_i \qquad (\operatorname{ind}(p_i) = 0 \text{ の場合}), \tag{5.13}$$

$$f = -X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + c_i \qquad (\operatorname{ind}(p_i) = 1 \text{ の場合}), \tag{5.14}$$

$$f = -X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 + c_i \qquad (\operatorname{ind}(p_i) = 2 \text{ の場合}), \tag{5.15}$$

$$f = -X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + c_i \qquad (\operatorname{ind}(p_i) = 3 \text{ の場合}). \tag{5.16}$$

これら4つの場合それぞれについて，$W_f(c_i-\varepsilon)$ から $W_f(c_i+\varepsilon)$ への変化がどのようなものであるかを調べる．ただし，ε は十分小さな正の定数で，区間 $[c_i-\varepsilon, c_i+\varepsilon]$ に含まれる f の臨界値は c_i のみであるとする．また，$U(p_i)$ を点 p_i の近傍で，$U(p_i)$ 内で f が上の (5.13)〜(5.16) の標準形のどれかで表されているものとする．

定義からすぐにわかるように，$W_f(c_i+\varepsilon)$ は

$$W_f(c_i+\varepsilon) = W_f(c_i-\varepsilon) \cup V_f(c_i-\varepsilon, c_i+\varepsilon)$$

$$(V_f(a, b) = \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\})$$

と表されるが，$V_f(c_i-\varepsilon, c_i+\varepsilon)$ は近傍 $U(p_i)$ の中には収まらない（$\mathrm{ind}(p_i)=1$ または 2 の場合）．そこで，議論の対象を $U(p_i)$ 内に収めるために，つぎの補題（詳しくは，[3] を参照）を用意する．

【補題 5.9】　$V_f^*(c_i)$ および $W_f^*(c_i)$ を

$$V_f^*(c_i) = V_f(c_i-\varepsilon, c_i+\varepsilon) \cap U(p_i)\ , \quad W_f^*(c_i) = W_f(c_i-\varepsilon) \cup V_f^*(c_i) \quad (5.17)$$

と定めれば，$W_f^*(c_i)$ と $W_f(c_i+\varepsilon)$ とは互いに M のアンビアントアイソトピーで移り合う．

この補題によって，$W_f(c_i-\varepsilon)$ と $W_f(c_i+\varepsilon)$ の関係を見るためには，$V_f^*(c_i)$ がどのようなものであるかを調べればよいことになる．これを $\mathrm{ind}(p_i)$ によって場合分けして考えよう．

(0)　$\mathrm{ind}(p_i)=0$ **の場合**

この場合には p_i における標準形は (5.13) で，

$$W_f(c_i-\varepsilon) \cap U(p_i) = \emptyset\ , \quad V_f^*(c_i) = \{(X_1, X_2, X_3) \mid X_1^2+X_2^2+X_3^2 \leq \varepsilon\}$$

であることがわかる．したがって，$V_f^*(c_i)$ は $W_f(c_i-\varepsilon)$ とは交わらない 3-球，すなわち $W_f(c_i-\varepsilon)$ に接着される 0-ハンドルである．

(1)　$\mathrm{ind}(p_i)=1$ **の場合**

この場合の p_i における標準形は (5.14) であり，$W_f(c_i-\varepsilon) \cap U(p_i)$ および $V_f^*(c_i)$ は

$$W_f(c_i-\varepsilon) \cap U(p_i) = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -X_1^2+X_2^2+X_3^2 \leq -\varepsilon\}$$
$$V_f^*(c_i) = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -\varepsilon \leq -X_1^2+X_2^2+X_3^2 \leq \varepsilon\}$$

によって与えられる．これらの集合の平面 $\{X_2=0\}$ での切口は，つぎの図 5.7 に示されるもので，実際の $W_f(c_i-\varepsilon) \cap U(p_i)$ および $V_f^*(c_i)$ はこの図を X_1-軸のまわりに回転して得られるものである．

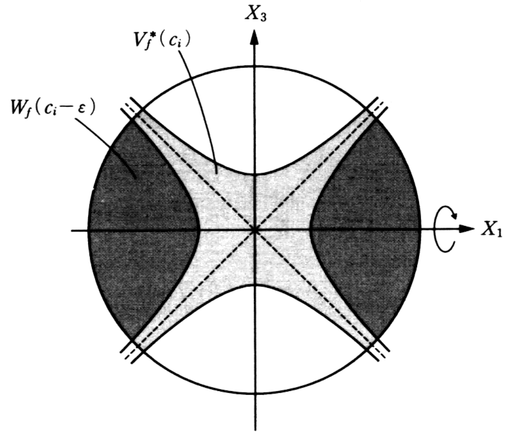


図 5.7

図 5.7 から，$\mathrm{ind}(p_i)=1$ の場合には，$V_f^*(c_i)$ が $W_f(c_i-\varepsilon)$ に接着される 1-ハンドルであることがわかる．

(2) $\mathrm{ind}(p_i)=2$ **の場合**

この場合の p_i における標準形は (5.15) であり，$W_f(c_i-\varepsilon)\cap U(p_i)$ および $V_f^*(c_i)$ は

$$W_f(c_i-\varepsilon)\cap U(p_i) = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -X_1^2-X_2^2+X_3^2 \le -\varepsilon\}$$
$$V_f^*(c_i) = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -\varepsilon \le -X_1^2-X_2^2+X_3^2 \le \varepsilon\}$$

によって与えられる．これらの集合の平面 $\{X_2=0\}$ での切口は，つぎの図 5.8 に示されるもの（これは $\mathrm{ind}(p_i)=1$ のときと同じ）で，実際 の $W_f(c_i-\varepsilon)\cap U(p_i)$ および $V_f^*(c_i)$ はこの図を X_3-軸のまわりに回転して得られるものである．

この図から，$\mathrm{ind}(p_i)=2$ の場合には，$V_f^*(c_i)$ が $W_f(c_i-\varepsilon)$ に接着される 2-ハンドルであることがわかる．

(3) $\mathrm{ind}(p_i)=3$ **の場合**

この場合には p_i における標準形は (5.16)，すなわち

$$W_f(c_i-\varepsilon)\cap U(p_i) = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -X_1^2-X_2^2-X_3^2 \le -\varepsilon\}$$

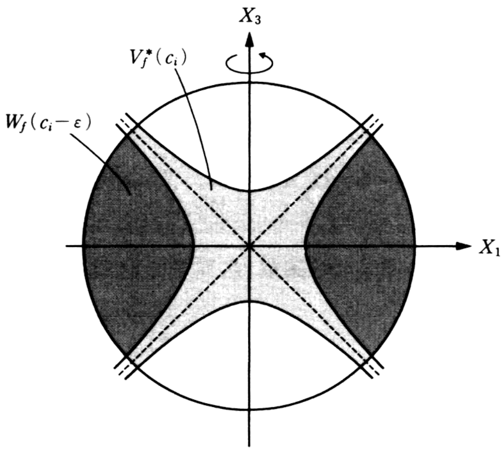


図 5.8

$$V_f^*(c_i) = \{(X_1, X_2, X_3) \mid -\varepsilon \le -X_1^2 - X_2^2 - X_3^2\}$$

である．このとき，$V_f^*(c_i)$ が 3-球で，$W_f(c_i-\varepsilon) \cap U(p_i)$ が $U(p_i)$ から $V_f^*(c_i)$ を除いたものであることが容易に確かめられる．したがって，$W_f(c_i-\varepsilon)$ に 3-ハンドル $V_f^*(c_i)$ を接着することによって $W_f(c_i+\varepsilon)$ が得られる．

以上の (0)~(3) をまとめると，$W_f(c_i+\varepsilon)$ と $W_f(c_i-\varepsilon)$ の間の関係を与えるつぎの定理となる．

【定理 5.10】 $\mathrm{ind}(p_i) = k$ のとき，$W_f(c_i+\varepsilon)$ は $W_f(c_i-\varepsilon)$ に k-ハンドルを接着して得られる多様体である．

この定理はモース関数がハンドル分解を定めることを示している．すなわち，$f; M \to \boldsymbol{R}$ を上に論じたモース関数とし，W_j を

$$W_j \equiv W_f(c_j+\varepsilon) \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, r)$$

と定義すれば，

$$W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_r \equiv M$$

が M のハンドル分解を与える．この逆，すなわち，「ハンドル分解を与えたときにそのハンドル分解を実現するようなモース関数が存在すること」も示すことができる（その証明はつぎの問題として読者に委ねる）．

問題 5.6　閉3次元多様体 M のハンドル分解

$$W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_j \subset \cdots \subset W_r = M$$

が与えられたとき，M 上のモース関数 f でつぎの (1), (2) を満たすものが構成できることを示せ．

(1) f は r 個の臨界値 $c_1 < c_2 < \cdots < c_r$ をもつ．

(2) $W_f(c_j + \varepsilon)$ は W_j にアンビアントアイソトピーで移すことができる．

5.3節に述べたハンドルのキャンセルをモース関数の言葉に翻訳することもできる．これについては [3] を参照していただきたい．

参考文献

[1]　鈴木晋一: 曲面の線形トポロジー（上，下）, 槇書店 (1986,1987)

[2]　本間龍雄: ポアンカレ予想物語 (数セミ・ブックス) 日本評論社 (1985)

[3]　松本幸夫: Morse 理論の基礎, (岩波講座 現代数学の基礎 27), 岩波書店 (1997)

6

スミスの定理

3次元幾何学的トポロジーとは

幾何学的トポロジーとは，私にとってはやはり，構成的，図形として対象を認識する態度にあるように思われる．研究に代数的な不変量が使われたとしても，その量が図形としての構造を示すということがないと，意味を見い出し難い．

ただ，1970年代以降の幾何構造を対象に導入して，それによって多様体の性質を見ていくような“幾何学的”な研究方法もあるので，将来は“幾何学的トポロジー”というと，双曲構造などの方法を指すということになるかもしれないとも思っている．

6.1　スミスの予想

図形 X から X への自己写像 $f: X \to X$ について，$f(x) = x$ となる点 x は f の**不動点** (fixed point) とよばれ，f の不動点全体の集合 $\mathrm{Fix}\,(f) = \{x \in X : f(x) = x\}$ を f の**不動点集合**とよぶ．f を n 回繰り返して作用させた結果得られる X 上の自己写像を f^n と表す．すなわち，$f^1 = f, f^n = f \cdot f^{n-1}$ である．X のすべての点 x に対して，$f^n(x) = x$ となるとき f を**周期写像**といい，そのような自然数 n の最小の値を f の**周期**という．

円周 S^1 や球面 S^2 上の周期写像の不動点集合がどのようなものとなるかは，1920 年頃にはすでにブラウアー (Brouwer) [4] やケルキャルト (Kerekjarto) [10] によって知られていた [5]．

スミス (P. A. Smith ; 1900 ～ 1980) は 1930~40 年代に 3 次元以上の球面の周期

写像の不動点集合の研究を精力的に発展させ，向きを保つ3次元球面の周期写像の不動点集合は，もしそれがあるならば，円周になることを示した [17]~[19]．そして,「この円周 S^1 は3次元球面 S^3 の中で，結び目としては自明になっているであろう」と予想した．プリンストン大学の創立200年(1947年)記念「数学の未解決問題」研究会報告の中に，「スミスにより提出された問題」としての，アイレンベルグ (Eilenberg) による記録がある（[6] 第36問）．

この予想は，スミスの研究から約40年後の1980年頃に肯定的に解決されたので，現在では "スミスの定理" とよばれる．この問題の解決はトポロジーの幅広い分野の研究が積み重なってはじめてできたものである．そのすべてをとり上げることは，この本の目的からも，レベルからも到底無理なことである．そこで本章では，"スミスの定理" がトポロジーのどのような分野のどのような性質が関係してくる，どのような問題であるのかについて解説していくにとどめる．定義なども，厳密にするとかえって読みにくくなる場合には，省略したり簡単にすませたりする．スミスの定理について詳しく述べてある本として，モーガン (Morgan) とバス (Bass) による "The Smith Conjecture" (1984) がある [16]．この本にはスミスの定理の証明だけでなく，発生から解決にいたる歴史を述べた記事もあり，関係文献も豊富なので，興味のある読者には大いに参考になるだろう．

6.2　周 期 写 像

6.2.1　円周とディスクの周期写像

平面上の原点を中心とした半径1の円周 S^1 を考えるとき，円周上の各点は $(\cos\theta^\circ, \sin\theta^\circ)$ と表されるので，θ を mod 360 で考える（すなわち $\theta \equiv 360 + \theta$）と，

$$S^1 \ni (\cos\theta^\circ, \sin\theta^\circ) \iff \theta \in R^1$$

の対応により，x 軸の正の向きとなす角度 θ° で単位円 S^1 の点を示すことができる．各点を正の向きに60°回転した点に写す写像を R_{60} と表すと，$R_{60}(\theta) = \theta + 60$ と書ける（図6.1）．この結果に対してさらに R_{60} を作用させると，

$$(R_{60})^2(\theta) = R_{60}(R_{60}(\theta)) = \theta + 120$$

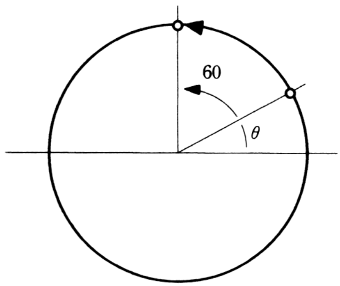


図 6.1

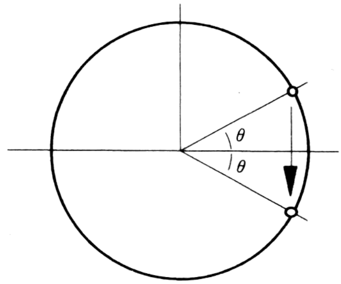


図 6.2

だから，$(R_{60})^6(\theta) = \theta + 360 = \theta$ となる．すべての点がこの写像 R_{60} を 6 回作用させるともとの点に戻る，このような写像を周期 6 の周期写像という（これからは，6 周期写像ということにしよう）．同様に R_{100} は周期 18 の周期写像であるが，$R_{\sqrt{2}}$ は周期写像ではない

問題 6.1　このことを証明せよ．

周期写像は一般の位相空間に対して考えることができる．すなわち位相空間 A と，A から A への連続写像 $f: A \to A$ があって，A のすべての点 a に対して，$f^n(a) = a$ となる最小の自然数 n があるとき，f を A の**周期** (period) n の**周期写像** (periodic map) という．必然的に f は同相写像である．

最初の円周の例で，$r(\theta) = 360 - \theta$ と定めると，$r^2(\theta) = \theta$ となり，r は周期 2 の周期写像である．周期 2 の周期写像はとくに**インボリューション** (involution) ともよばれる（図 6.2）．

R_{60} では $R_{60}(\theta) = \theta$ となるような点 θ はないが，r には $r(0) = 360 = 0, r(180) = 180$ と 2 点が写像 r で動かない．r における 0 と 180 のような点は周期写像 r の不動点とよばれる．これから写像 r の不動点の集合を Fix(r) と表そう (Fix$(r) = \{0, 180\}$)．ここで，R_{60} のほうは円周の向きを保っているが (orientation preserving)，r は向きを逆転させ (orientation reversing) ていることに注意しておこう．S^1 の周期写像は本質的にこの 2 つだけである．

【定理 6.1】　S^1 の周期写像は，向きを保つ不動点をもたない回転と，向きを反転

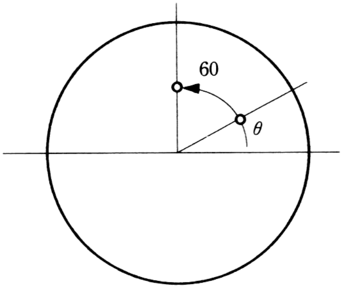


図 6.3

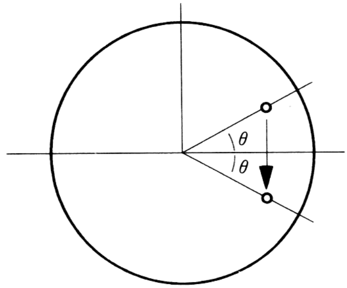


図 6.4

させ2点を不動点とするものだけである.

円周 S^1 の周期写像は，自然にディスク D^2 上の周期写像に拡張される. $S^1 = \{(1,\theta) : 0 \leq \theta \leq 360\}$ と考え，ディスクを，$D^2 = \{(x,\theta) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \theta \leq 360\}$ と表す. ここで x は原点からの距離を表している. 写像の記号はそのまま使うことにして，

$$R_{60}(x,\theta) = (x, \theta + 60)$$
$$r(x,\theta) = (x, 360 - \theta)$$

とすると，これがもとの円周の周期写像の拡張であることは明らかだろう. それぞれの不動点集合を考えると， $\mathrm{Fix}(R_{60})$ は原点の1点，$\mathrm{Fix}\ (r) = \{(x,0),(y,180) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ は線分である.

6.2.2　2次元球面と3次元球の周期写像

3次元空間内の単位球面，すなわち原点を中心とした半径1の球面 S^2 について前節と同様のことを観察してみよう. Z 軸上の2点 $(0,0,1),(0,0,-1)$ を地球の北極と南極と見たてて，S^2 の各点を表示するのに北緯 x と東経 y を成分とする新しい座標 (x,y) を使おう. すなわち，南緯 x は北緯 $-x$ とし，西経 y は東経 $(360-y)$ と表現することにする. もちろん地球のほうには，回転楕円体ではなく，真の球になってもらおう. こうすると北極は $(90,*)$，南極は $(-90,*)$ と表される. この2点では特別に，$*$ はどんな値でもよい. 地球の自転の向きに，北極と南極を軸にして，50°回転する写像をまた $R_{50} : S^2 \to S^2$ と書くことにしよう (図 6.5).

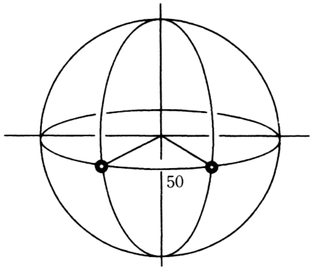


図 6.5

すなわち，

$$R_{50}(x,y)=(x,y+50),\quad -90\le x\le 90,\quad 0\le y\le 360 \pmod{360}$$

とすると R_{50} は向きを保つ周期写像で，その周期は 36 であり，不動点は北極と南極の 2 点である．この写像 R_{50} は 2 枚の円板に対して R_{50} と R_{-50} を適用し，その境界の円周を反対向きに同一視して得られるものと同じである．このとき 1 枚のディスクは北半球，もう 1 枚は南半球に相当している．

問題 6.2 これを具体的に写像として表現してみよ．

また $r:S^2\to S^2$ を

$$r(x,y)=(x,360-y)$$

で定める（図 6.6）と，これは周期 2 で球面の向きを反転させる周期写像になっている．その不動点の全体は $\mathrm{Fix}\,(r)=\{(x,0),(x',180):-90\le x,x'\le 90\}$，すなわち北極と南極を含む大円 (円周) である．

つぎに $a:S^2\to S^2$ を，

$$a(x,y)=(-x,y+180)$$

なる写像としてみよう．これは，北極を南極に，南極を北極に写し，球面上の点を球の中心の反対側の点に対応させるもので，**対心写像** (antipodal map) などとよばれる．これは球面の向きを逆転させる周期2の周期写像であるが，不動点をも

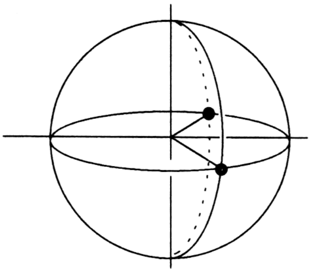


図 6.6

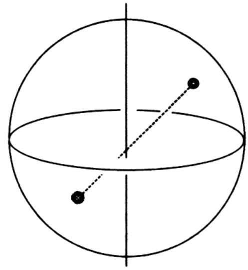


図 6.7

たない（図 6.7）．写像 $b : S^2 \to S^2$,

$$b(x,y) = (-x,y)$$

は，同じ経線上で北半球と南半球を入れ替えるものであり，Fix(b) は赤道である．しかし，この写像 b はつぎのように本質的に写像 r と似ているものであることがわかる．赤道上の (0,0) と (0,180) を通る直線を軸として，赤道を 90°回転して北極と南極を通るようにする．球面を回転させるこの写像を c で表すと，$crc^{-1} = b$ となっている．r と b の不動点の集合 Fix (r) と Fix (b) が同相になるのは当然である．r と b のような関係にある周期写像を互いに同値であるといって，本質的に同じものと見ることにする．

問題 6.3　この関係が本当に同値関係になっていることを確かめよ．

S^2 の周期写像はこれら 3 つのタイプに限られることは以前から知られている．もちろん，上に示したような，同値 (crc^{-1} と r は同じと見る) の見方による．まとめておくと，

【定理 6.2】　S^2 の周期写像は，恒等写像を除けば，つぎの 3 種類のみである．

(1)　向きを保ち，2 点を不動点集合とする “回転”,

(2)　向きを反転して，S^1 を不動点集合とする “折り返し”,

(3)　向きを反転して不動点をもたない “対心写像”.

ここで，円周 S^1 とディスク D^2 との関係と同様に球面 S^2 の周期写像を自然に球 D^3 に拡張することもできる．これは読者にお任せしよう．不動点集合がそれぞれ線分，ディスク，1 点になることを確認してほしい．

6.2.3 3 次元球面の周期写像の構成

3 次元球面の周期写像を考えるにあたって，1,2 次元のときと同様にまずいくつかの例をつくってみよう．

単位球面 S^2 上の点を経度 x と緯度 y を用いて (x,y) と表した．この座標 (x,y) を利用すると，単位球 B^3 上の各点 p は (t,x,y) という座標で表すことができる．このときの t は球 B^3 の中心 O から p までの距離を表している．

図 6.7 の S^2 の対心写像 a を，$S^2 = \partial B^3$ として自然に B^3 に拡張して，

$$a(t,x,y) = (t,-x,y+180)$$

で定義される写像 $a : B^3 \to B^3$ は B^3 の 2-周期写像で，B^3 の向きを反転させる．Fix(a) は球の中心 1 点だけである．そのような 3 次元球上の周期写像のコピーを 2 つ用意して，

$$\begin{aligned} a_+ : B^3_+ \to B^3_+,\ a_+(+t,x,y) &= (+t,-x,y+180) \\ a_- : B^3_- \to B^3_-,\ a-(-t,x,y) &= (-t,-x,y+180) \end{aligned}$$

とする．そして 2 つの球面 $S^2_+ = \partial B^3_+$ と $S^2_- = \partial B^3_-$ を $h(t,x,y) = (-t,x,360-y)$ により $(t=\pm 1)$，向きを反対にして貼り付ける．そこで，$S^3 = B^3_+ \cup B^3_-/h$ とし（これは，$B^3_+ \cup B^3_-$ に h による等化位相を導入したもの），$a = a_+ \cup a_-$ を上の写像の合成とすれば，向きを反転する 2 周期写像 $a : S^3 \to S^3$ を得る．このときの不動点集合 Fix(a) は 2 点からなる．

つぎに，S^3 を種数 1 のヘゴール分割して別の周期写像をつくってみよう．

R^3 内の，直交座標で見て，(2,0,0) を中心とした x-z 平面内にあるの半径 1 のディスクを z 軸を中心にして回転してできる立体を**ソリッドトーラス（円環体）**T^3 といい，その表面を**トーラス（円環面）**という．ソリッドトーラスの点を $\{(x,\tau,\eta) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \tau,\eta \leq 360\}$ で表そう，$\{(1,\tau,\eta) : 0 \leq \tau,\eta \leq 360\}$ がトーラスである．ここでも，$0 \equiv 360$ と見る．

第1章で見たように，$S^3 = R^3 \cup \infty$ と考えるとこのソリッドトーラスの外側，$V = \mathrm{cl}(S^3 - T^3)$，はまたソリッドトーラスとなっている．

いま，$\Phi_\theta(x,\tau,\eta) = (x,\tau,\eta+\theta)$ として写像 $\Phi_\theta : T^3 \to T^3$ をとると，θ が有理数ならば，これは有限の周期をもつ周期写像である (図 6.8 左)．T^3 にはまた，$\Omega_\theta(x,\tau,\eta) = (x,\tau+\theta,\eta)$ なる同相写像 $\Omega_\theta : T^3 \to T^3$ もある．この Ω_θ と同じタイプの写像 Ω'_θ を $V = \mathrm{cl}(S^3 - T^3)$ に定めて，その共通部分であるトーラス $V \cap T^3 = \partial V = \partial T^3$ で一致するように表現すると $\Omega'_\theta(y,\eta,\tau) = (y,\eta+\theta,\tau)$ となり (図 6.8 右)，合わせた写像 $R_\theta = (\Phi_\theta \cup \Omega'_\theta)$ は S^3 の周期写像となる．$\mathrm{Fix}\,(\Omega'_\theta) = \phi, \mathrm{Fix}(R_\theta) = \{(0,\tau,*) : 0 \le \tau \le 360\}$（これは T^3 の**コア**）で，$\mathrm{Fix}\,(R_\theta) \equiv S^1$ となる．

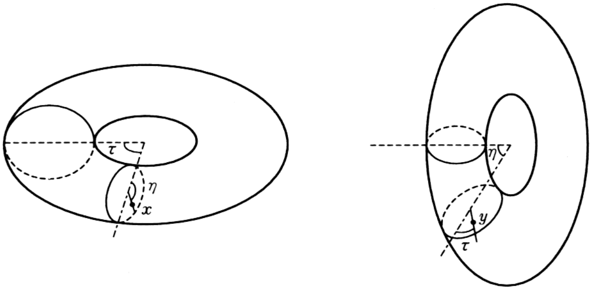


図 6.8

この S^3 の周期写像 R_θ を，自明な円周 S^1 を軸とした“角度 θ の回転”という．R_θ は S^3 の向きを保つ写像である．これで，S^3 の向きを保つ周期写像で不動点（集合）が S^1 となるものが存在することが示された．

問題 6.4　S^2 の回転 R_{50} を北半球と南半球の2つのディスク D^2 の境界を同一視することによって2つのディスクの周期写像の合成で表したように，S^3 の周期写像 R_{50} を2つの3次元球の境界を同一視することで，2つの球の周期写像から表現してみよ．

3次元球面を，伝統的に，4次元ユークリッド空間 $R^4 = \{(x,y,z,w) : x,y,z,w$ は実数$\}$ 内の単位球面 $S^3 = \{(x,y,z,w) \in R^4 : x^2+y^2+z^2+w^2 = 1\}$ と表したと

き，S^3 の対心写像 $a(x,y,z,w)=(-x,-y,-z,-w)$ は，4次元では，向きを保つ写像である．これは周期2の周期写像で不動点をもたない．また，S^2 の北半球と南半球の折り返しと同様な写像を S^3 でつくれば，周期2の向きを反転する周期写像が得られて，この不動点集合が2次元球面 S^2 となることもすぐに理解できるだろう．

ここでいままでにつくった S^3 の周期写像を整理してみると，

(1) 向きを保ち，不動点をもたない，2周期の対心写像 a.

(2) 向きを保ち，S^1 を不動点集合とする，有限周期の回転 R_θ.

(3) 向きを反転させ，2点を不動点とした，2周期の S^2 の対心写像の拡張.

(4) 向きを反転させ，S^2 を不動点集合とした，2周期の S^2 での折り返し.

の4つがある．もちろん，これ以外にも，S^3 全体を不動点集合とする恒等写像がある．

ところで，スミスは S^3 の周期写像の不動点集合としては，上の4つの場合だけであることを示している [17] ～ [19].

6.2.4 3次元球面の周期写像

ここで周期写像と3次元球面 S^3 の周期写像について一般的にながめておこう．

いま，$f: X \to X$ を図形 X の n 周期写像としよう $(n>0)$. X のすべての点 x に対して $f^n(x)=x$ であるが，ある自然数 $m\ (<n)$ に対して，ある点 y で $f^m(y)=y$ となったとしよう．$f^m(y)=y=f^n(y)$ だから，m は n の約数である．

問題 6.5 これを証明せよ．

とくに n が素数ならば，y は f の不動点になっている．このように，n が素数のときには n 周期写像は一般の場合よりもわかりやすそうである．

スミスが S^3 の向きを保つ不動点をもつ周期写像について最初に示したことは，「p が素数のとき，p 周期写像 $f: S^3 \to S^3$ の不動点集合 $\mathrm{Fix}(f)$ は S^1 である」であった [17]．これをもとに一般の n 周期写像について考えてみよう．

いま，$f: S^3 \to S^3$ が S^3 の n 周期写像としよう $(n>0)$. $0<m<n$ なる m について，ある点 y に対して $f^m(y)=y$ であったとすると，上で見たよう

に，素数 p があって $n = kp$ と書ける．$f^n(x) = f^{kp}(x) = (f^k)^p(x)$ であるから，$(f^k): S^3 \to S^3$ は S^3 の向きを保ち（f 自身が不動点をもつから）不動点をもつ p 周期写像となり，$\mathrm{Fix}(f^k) = S^1$ である．$\mathrm{Fix}(f^k)$ 内の各点 y について，$f(y) = f(f^k(y)) = (f^{k+1})(y) = f^k(f(y))$ ，したがって $f(y)$ も $\mathrm{Fix}(f^k)$ の点となるので，$f\colon \mathrm{Fix}(f^k) \to \mathrm{Fix}(f^k)$ は S^1 から S^1 への写像である．$\mathrm{Fix}(f^k)$ の任意の点 y に対して $f^{-1}(y) = x$（すなわち $f(x) = y$）とおくと，$f^k(x) = f^{k-1}(y) = f^{-1}(f^k(y)) = x$ となって，x は $\mathrm{Fix}(f^k)$ の点である．したがってこの $f\colon \mathrm{Fix}(f^k) \to \mathrm{Fix}(f^k)$ は S^1 から S^1 への同相写像で，向きを保ち，不動点をもつ周期写像だから，定理 6.1 により恒等写像となる．つまり $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(f^k) = S^1$ である．すなわち，

【定理 6.3】 向きを保つ S^3 の周期写像が不動点をもつならば，その不動点集合は S^1 である．

定理 6.3 のような n 周期写像 f では，y が f の不動点でないならば，写像 $1\ (= f^0 = f^n), f, f^2, \cdots, f^{n-1}$ による y の像，$y = f^0(y) = f^n(y)$, $f(y) = f^1(y), \cdots, f^{n-1}(y)$ はすべて相異なる n 個の点となる．

6.3 結 び 目

6.3.1 結 び 目

【定義 6.4】 S^3（または R^3）内の円周 S^1 を**結び目** (knot) といい，ある平面上にのっているものと同じ（アンビエントアイソトピック）なものを**自明な結び目** (trivial knot) という．

S^3 から S^3 への同相写像で移り合うものを，“結び目として同じ” とする見方もあるが，ここでは結び目が自明（ほどけている）かどうかを問題とするので，どの見方でもよい．結び目についてのやさしい紹介は “組合せ位相幾何学” [1] の第 7 章を参照されたい．結び目 $K \subset S^3$ が自明である（ほどけている）かどうかは，第 5 章の “基本群” を $S^3 - K$ について適用して得られる結び目群 (knot group) $\pi_1(S^3 - K)$ が Z（無限巡回群）となるかどうかで判定される．6.2.3 項で S^3 の

“角度 θ の回転” $R_\theta(=\Phi_\theta \cup \Omega'_\theta)$ を紹介したが，この写像の不動点集合である円周は自明な結び目であるので，そこでは「自明な円周 S^1 を軸とした」という言葉を使ったのである．S^2 内の S^1 や，S^3 内の S^2 はすべてアンビアントアイソトピック で移りあえる，すなわち結び目は本質的に存在しない (シェンフリースの定理)．結び目の困難が最初に (そしておそらく一番難しく) 現れるのが 3 次元である．スミスの予想の (解決の) 難しさは「3 次元球面とはいったい何か」と「結び目の難しさ」の両方が同時に関係するところにあるのだろう．

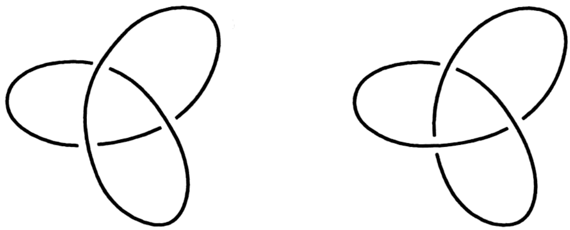


図 6.9　自明な結び目と自明でないもの

3 次元球面 S^3 の向きを保つ周期写像 f が不動点をもてばその不動点集合は，スミスの結果から，円周 S^1 になる．S^3 の中のこの結び目 S^1 は自明なものしかないだろう，というのが “スミスの予想” である．

6.3.2　ワイルドな結び目

ビングは向きを反転する S^3 の周期 2 の周期写像で，その不動点集合が第 1 章の角の生えた球面となるものを構成した [2]．角の生えた球面は S^3 内で普通の (S^3 を 2 つの 3 次元球に分ける) S^2 とはアンビアントアイソトピックでないから，これは 6.2.3 項の最後に述べた S^2 を不動点集合とする周期写像とは異なるものである．このビングの例は向きを反転する周期写像だから，スミスの予想とは無関係である．ところがモンゴメリー (Montgomery) とジピン (Zippin) は，ビングの例をヒントにして周期 2 で向きを保つ S^3 の周期写像でその不動点集合が S^1 であるものをつくった．この不動点集合は，いわゆる**ワイルドな結び目** (wild knot) とよばれるものの仲間であり，自明なものではない．先に述べた“スミスの予想”に対

しては反例となっている [15],[3].

角の生えた球面もワイルドな結び目もともにそれ自身は S^2 であり S^1 であるが，S^3 の組合せ多様体（また微分多様体）としての部分多様体ではない．

図 6.10 をみれば,「なるほどこれは素直な対象でないな」とは感じられよう．では「これを対象としない」ということをどう表現（定式化）すればよいのだろうか．PL トポロジーの立場からこれを簡単に述べておこう．

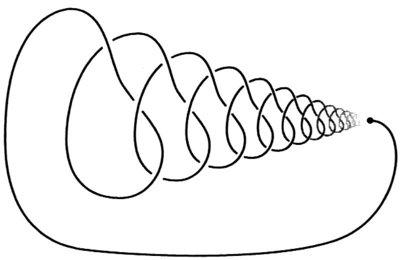


図 6.10　ワイルドな結び目

【定義 6.5】　多面体 X が PL 多様体 M の中で**素直**（テイム，tame）だというのは，M のある三角形分割 K ($|K| = M$) をうまくとると，K の部分複体 L が存在して $|L| = X$ となることである．テイムでない部分集合をワイルドという．

一見，このテイムの定義は M の三角形分割 K に依存するようであるが，M を 3 次元多様体に限れば，その三角形分割の一意性（第 3 章，3 次元多様体についての基本予想）から，X が M のある三角形分割で部分複体になれば他の任意の三角形分割に対してもその細分の部分複体になることが保証される．

このワイルドな結び目のような“病的な”ものを排除した素直な世界でならどうか，という問題は依然として解決されていないので，“スミスの予想”はつぎのように修正されたものと解釈する．

【予想 6.6】 (スミスの予想) 不動点をもつ S^3 の周期 PL 写像（または微分写像）で向きを保つものの不動点集合 S^1 は自明な結び目であろう.

6.3.3 周期写像と三角形分割

2 つの PL 多様体 A と B の間の PL 写像 $f : A \to B$ があれば，複体 K と L があって $A = |K|, B = |L|$（すなわち K と L はそれぞれ A と B の三角形分割）で，$f : K \to L$ は単体写像とできる．しかし，$A = B$ のとき，$A = |K|$ で，$f : K \to K$ が単体写像とできるとは一般にはいえない．過去には周期写像の研究でその写像が PL 写像のときに，単体写像 $f : K \to K$ があることを前提とした議論が多かった．

この問題を正面から扱ったものは，3 次元多様体の三角形分割の存在と一意性を示したモイズ (Moise) の 1979,80 年の論文 [13],[14] までなかった．その中の定理をここで必要とする形で引用しておこう．

【定理 6.7】 （[14] 定理 1.5）$f : S^3 \to S^3$ が周期 n の周期写像で，その不動点集合 $\mathrm{Fix}\,(f) = S^1$ がテイムならば，$\mathrm{Fix}(f)$ を部分複体とする S^3 の三角形分割 K があって $(|K| = S^3)$, $f : K \to K$ が単体写像となる．

この定理によって，スミスの予想を S^3 の三角形分割を与える複体の自己単体写像として扱えることとなる．そして，その不動点集合の近くの周期写像の様子も，つぎの図 6.11 のようになっていることがわかる．

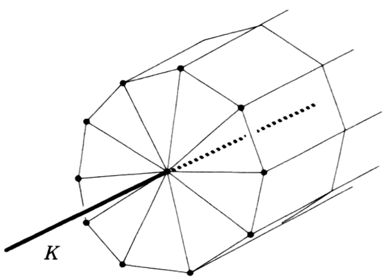


図 6.11 K の近くの様子

6.3.4　自明な結び目

モイズは，1962年に文献[12]で，つぎを証明した．

【定理6.8】 S^3 の向きを保つ周期写像の不動点集合が自明な結び目ならば，その周期写像は6.2.3項の(2)の回転である．

だから，スミスの予想が正しいならば，S^3 の向きを保つ不動点をもつ有限周期の周期写像は本質的に6.2.3項の(2)の回転だけとなる．後にスミスもこのモイズの定理をもっと簡単に示している[20]．

6.4　被　覆　空　間

6.4.1　被覆空間

第2章レンズ空間で，**被覆空間** (covering space) が導入された．図6.12，6.13は簡単な被覆空間の例である．

図形（空間）A とその n 周期写像 $f : A \to A$ について，A の2点 x, y が，$f^k(x) = y$ または $f^k(y) = x$ となる k (≥ 0) が存在するとき，$x \sim y$ と定める（$f^0(x) = x, f^1 = f$ と解釈することとする）．この関係 $\sim$ は同値関係であり，こ

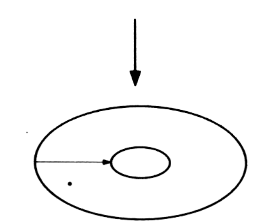


図 6.12　帯と帯

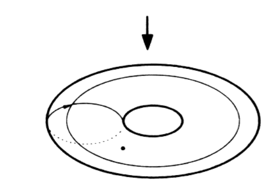


図 6.13　平面とトーラス

の同値関係による A の類別に A から誘導される位相を定めたものを A の商空間（または等化空間）といい，A/f と表される．

S^3 の向きを保ち不動点をもつ n 周期写像 $f : A \to A$ は，定理 6.3 で見たようなもっと強い性質をもつ．$p(x)$ を x を含む S^3/f の類として，写像 $p : S^3 \to S^3/f$ を定め，$K = \mathrm{Fix}(f) \subset S^3, p(K) = K' \subset p(S^3)$ とすると，p を $S^3 - K$ に制限した写像 $p : (S^3 - K) \to (p(S^3) - K')$ は**被覆写像** (covering map) になる．$p(S^3) - K'$ の各点 x の原像 $p^{-1}(x)$ は n 個の点 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ からなり，各 x_i の近傍では p は同相となるから，$p : (S^3 - K) \to (p(S^3) - K')$ は n 重被覆写像である．K は f の不動点の集合だから，$p : S^3 \to S^3/f$ そのものは n 重被覆写像ではない．

6.4.2 周期写像と分岐被覆空間

この被覆空間の概念を少しだけ拡げたものに，**分岐被覆空間**がある．正確な定義をするとそれに必要な概念や用語も多くなるので，ここでは例を見て理解してもらおう．日本語での（分岐）被覆空間について解説したものは少ないので,「組合せ位相幾何学」[9] の第 5 章被覆空間を見てほしい．

図 6.14 は帯 (バンド) とメビウス帯を基礎空間 (base space) とし，トーラスを分岐被覆空間とする例である．被覆写像がどんなものかは図からわかるだろう．この場合は乱暴にいえば，トーラスをつぶして，帯とメビウス帯ができるが，それはつぶし方 (分岐被覆写像) が違うからということになる．

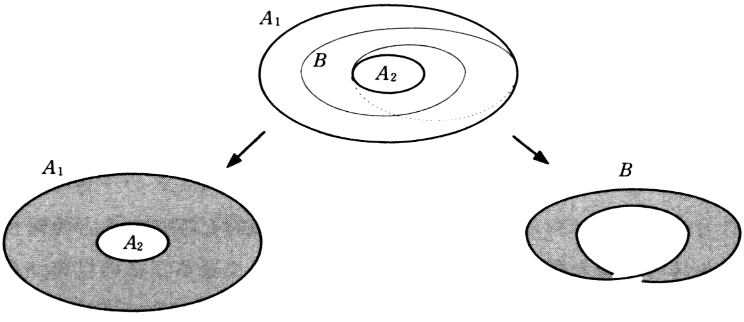


図 6.14 トーラス，帯，メビウス帯

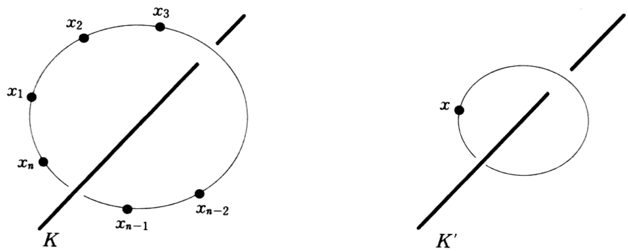


図 6.15　K と K'

前節の写像 $p: S^3 \to S^3/f$ は，この意味で K を**特異点**（分岐集合）とする分岐被覆空間の**分岐被覆写像**とよばれる．K の1点のまわりを近くで1回まわるループ L の p による像は K' のまわりをちょうど n 回まわることから，$p(S^3)$ が S^3 であることがわかる．

分岐被覆写像 $p: S^3 \to S^3/f = S^3$ では，結び目 $K \subset S^3$ が結び目 $p(K) = K' \subset S^3$ に写されている．$K \subset S^3$ が結び目として自明であることと，$K' \subset S^3$ が結び目として自明であることとは同値であるが，一般には異なる結び目としか考えられない．

ここで，スミスの予想は「$K \subset S^3$ は自明な結び目である」ことと「$K' \subset S^3$ が自明な結び目である」ことのどちらを示してもよいことになる．もし，スミスの予想が間違っているなら，自明でない結び目 $K \subset S^3$ と $K' \subset S^3$ とがあって，それらの間に分岐被覆写像 $p: S^3 \to S^3$ がはたらいているという例（反例）が存在することになる．

ここで，分岐被覆空間の一意性（[1] 第7章）から，結び目理論からのスミスの予想へのアプローチができる．自明でない結び目 $K' \subset S^3$ について，それを分岐集合とする有限分岐被覆空間を構成して，$K' \subset S^3$ の（多くは結び目群の）性質からそれが S^3 とならないことを示せば，$K' \subset S^3$ がスミスの予想の反例とはならないことがわかる．あらゆる自明でない結び目に対してこのことを確かめられれば，スミスの予想の正しいことが示されるたことになる．この見方から多くの結び目が反例とならないことがフォックス (Fox) や樹下らによって確かめられている [7],[11].

今後は，$p(K) = K' \subset S^3 = p(S^3)$ の構造を対象として考えていこう．

なお 3 次元多様体を分岐被覆空間の立場からながめるとき，ヒルデン (Hilden) によってつぎのようなことがわかっている [9].

【定理 6.9】 任意の閉 3 次元多様体 M に対して，**絡み目** L (link，複数の S^1) $\subset S^3$ が存在して，M は L を分岐集合とする S^3 の分岐被覆空間となる．

6.5　非可縮曲面とザイフェルト多様体

6.5.1　非可縮曲面

コンパクトな曲面 F の上の閉曲線 L（すなわち $= S^1$）は F の上のディスク（D^2）の境界になっているとき**可縮**であるということにする．閉曲面は可縮でない（非可縮）閉曲線で切り離していくと，いつかは（有限回で）球面 S^2 からいくつかの円板を切り取ったものとなる．この事実がコンパクト曲面（2 次元多様体）の分類ができることを保証している，といってもよいだろう．

同様のことを 3 次元で考えてみよう．ここでは向き付け可能なものについてだけ考えることにし，コンパクトな 3 次元多様体 M^3 は S^3 でも D^3 でもないものとする．また，コンパクトな 3 次元多様体 M^3 内のコンパクトな曲面 F は，いつも，$\mathrm{Int}\, F \subset \mathrm{Int}\, M^3, \partial F \subset \partial M^3$ と埋め込まれている状態のみを考える．

【定義 6.10】 M^3 の中の閉曲面 F が**可縮** (compressible) とは「$\mathrm{Int}\, D^2 \subset M^3 - F$ で，$\partial D^2 = S^1 \subset F$ が F で可縮でない」ディスク D^2 が M^3 の中に存在することをいうこととする．

閉曲面 F が M^3 の中で可縮だと，このような D^2 に沿って F を M^3 の中で変形することができることとなる．可縮でない曲面を非可縮であるという．非可縮な曲面は上のような意味で M^3 の中で変形できないから，それだけ本質的に窮屈に埋め込まれているという感じである．D^2 と S^2 はつねに非可縮である．

【定義 6.11】 M^3 内の閉局面 F_0 と F_1 に対して，M^3 内の部分多様体 V があって，$V = F_0 \times I = F_1 \times I$ のとき，F_0 と F_1 は**平行**であるという．

非可縮曲面は3次元多様体の研究では，つぎのような意味で重要な役割をもつ．

【定理 6.12】 （ハーケン (Haken) の有限性定理）[8]　3次元多様体内の交わらない非可縮閉曲面はある個数以上あれば，それらのうちの2つは平行になる．

この個数はハーケン数 (Haken number) などともよばれる．

6.5.2　3次元多様体とその境界

いま，コンパクトな3次元多様体 M^3 の境界 ∂M^3 が連結だとしよう．境界 ∂M^3 の埋め込み $i : \partial M^3 \to M^3$ から誘導される基本群の準同型写像を $i* : \pi_1(\partial M^3) \to \pi_1(M^3)$ とする．$\pi_1(M^3)$ の部分群 H で，$\mathrm{Im}(i*) = i*(\pi_1(\partial M^3))$ の部分群 H' と共役な群 H を**境界的**ということにする $(H = t^{-1}H't, t \in \pi_1(M^3))$．

6.5.3　ザイフェルト多様体 (Seifert manifold)

ソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ を $\{D^2$ の各点$\} \times S^1$ であるような線（ファイバー），$\{p\} \times S^1, p \in D^2$，の集まりと見て，ある断面（メリディアン）で切り離して，もう一度貼り合わせるとき，たとえば D^2 の中心を固定して240度ひねってから貼り合わせてみよう．すると，中心線は変化しないが，あとの線（ファイバー）は S^1 の（ロンディチュード）方向に3回，D^2 の中心 $\times S^1$ の（メリディアン）方向に2回回ってからもとに戻っている．このタイプを(3,2)型といおう．この線（ファイバー）の近傍はすべてこれと平行になっている．このような線（ファイバー）を正則線（正則ファイバー）とよぶ．中心線だけが，その近傍が平行でなく，(3,2)型の線（ファイバー）ばかりである．この中心線のようなものを(3,2)型の特異線（特異ファイバー）とよぶことにする（図6.16）．

ザイフェルト多様体とは，このような正則ファイバーと特異ファイバーの集合がコンパクト3次元多様体をなすものをいう．特異ファイバーは有限個しかない．第

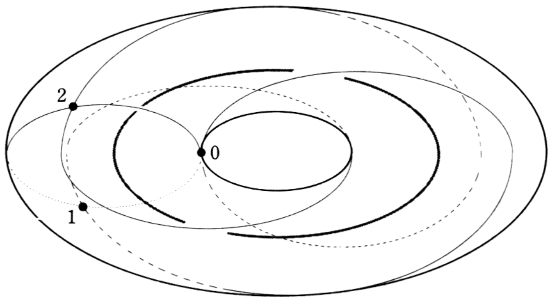


図 6.16　(3,2) 型特異ファイバー

2章で取り扱われたレンズ空間は，2つ（以下）の特異ファイバーをもつから，ザイフェルト多様体であり，閉曲面 F^2 に対して $F^2 \times S^1$ は特異ファイバーのないザイフェルト多様体である．ザイフェルト多様体はこのように広い範囲の3次元多様体を含むクラスである．

6.6　予想から定理へ

6.6.1　予　　想

もう一度スミスの予想について整理してみよう．3次元球面 S^3 の向きを保つPL周期写像 f が不動点をもてばその不動点集合 Fix $(f) = K'$ は S^1 であり，これがつねに自明な結び目であろうというのがスミスの予想であった．f によって写される点を同一視して得られる**等化空間** (商空間) S^3/f はまた3次元球面で，K' は不動点集合だから $S^3/f = S^3$ 内の結び目 K となり，K' の自明性と K の自明性とは同値である．等価写像 $p : S^3 \to S^3/f = S^3$ は分岐被覆空間とよばれる構造をもつ．逆に，S^3 内の結び目 K を分岐集合とする S^3 の n 周期分岐被覆空間 (cyclic covering) Σ^3 をつくると，Σ^3 の被覆変換 $f : \Sigma^3 \to \Sigma^3$ は向きを保つ n 周期写像であり，等化写像 $p : \Sigma^3 \to \Sigma^3/f = S^3$ は分岐被覆写像で，不動点をもつから Fix $(f) = K$ は S^1 である．もしすべての自明でない結び目 $K \subset S^3$ に対して，上のようにしてつくった分岐被覆空間 Σ^3 が S^3 とならなければ，スミスの予想は正しいこと（すなわち“定理”）になる．なお，結び目の分解の一意性から， $K \subset S^3$

は素 (prime) なものとしてよいことがわかっている．結び目 $K \subset S^3$ に対して，K の正則近傍 $N(K;S^3)$ の境界 ∂N はトーラス $(S^1 \times S^1)$ で，$\pi_1(S^1 \times S^1) = Z \times Z$. $S^3 - K = S^3 - N(K;S^3)$ であるが，K が自明ならば，$S^3 - \mathrm{Int}\, N(K;S^3) = S^1 \times D^2$ である．

6.6.2　定理への道筋

ここまで，スミスの予想について考えてきたが，この先は1970年代後半に展開された3次元多様体の新しい研究が主役となり，この本の範囲を超える．前節で用意した言葉で "予想" が "定理" となる道筋を簡単に整理して，この章を終わることとする [16].

結び目 $K \subset S^3$ について，つぎのように2つの場合に分けて考えよう．

(1) $S^3 - \mathrm{Int}\, N(K;S^3)$ には境界に平行でない非可縮閉曲面 F が存在する場合．

(2) $S^3 - \mathrm{Int}\, N(K;S^3)$ には非可縮閉曲面は境界に平行なものだけが存在する場合．

(1) の場合が起こらないことは，ミークス (Meeks) とヨー (Yau) の結果を用いてゴードン (Gordon) とリザランド (Litherland) によって証明された [16]. (2) はさらに2つの場合に分けて考えられる．

(2-a) $S^3 - \mathrm{Int}\, N(K;S^3)$ がザイフェルト多様体であるとき．

(2-b) $S^3 - \mathrm{Int}\, N(K;S^3)$ の基本群 $\pi_1(S^3 - \mathrm{Int}\, N(K;S^3))$ は，$(Z \times Z)$ と同型な部分群はすべて境界的であり，$S^3 - \mathrm{Int} N(K;S^3) \neq S^1 \times D^2$ であるとき．

(2-a) の場合は，ザイフェルト多様体の研究から，$S^3 - \mathrm{Int}\, N(K;S^3) = S^1 \times D^2$ となる．すなわち，K は自明な結び目である．

(2-b) の場合はサーストン (Thurston) の双曲幾何構造が $S^3 - \mathrm{Int} N(K;S^3)$ にはいる場合になり，議論を続けるとやはりこの場合も起こりえないことがわかる．

参考文献

[1] 本間龍雄: 組合せ位相幾何学 (共立全書 231), 共立出版 (1980)

[2] R.H. Bing: A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres. Ann. of Math, **56**, 354-362 (1952).

[3] R.H.Bing: Inequivalent families of pereodic homeomorphisms E^3. Ann. of Math., **80**, 78-93 (1964).

[4] L.E.J. Brouwer: Uber die periodischen Transformationen der Kugel. Math. Ann., **80**, 262-280 (1919).

[5] S. Eilenberg: Sur les transformations periodiques de la surface du sphere. Fund. Math., **22**, 28-41 (1934).

[6] S. Eilenberg: On the problems of topology. Ann. of Math., **50**, 247-260 (1949).

[7] R.H.Fox: On knots whose points are fixed under a periodic transformation of the 3-sphere. Osaka J. Math., **10**, 31-35 (1958).

[8] W.Haken: Theorie der Normal Flachen. Acta Math., **105**, 245-375 (1961).

[9] H.Hilden: Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3. Bull. Amer. Math. Soc., **80**, 1234-1244 (1976).

[10] B. Kerekjarto: Uber die periodischen Transformationen der Kreisschube und Kugelflache. Math. Ann., **80**, 36-38 (1919).

[11] S.Kinoshita: On knots and periodic transformations. Osaka J. Math., **10**, 43-52 (1958).

[12] E.E.Moise: Periodic homeomorphisms of the 3-sphere. Illinois J. Math., **6**, 206-225 (1962).

[13] E.E.Moise: Statically tame periodic homeomorphisms of compact connected 3-mainifolds I: homeomorphisms conjugate to rotations of the 3-sphere. Trans. Amer.Math.Soc., **252**, 1-47 (1979).

[14] E.E.Moise: Statically tame periodic homeomorphisms of compact connected 3-mainifolds II: statically tame implies tame. Trans. Amer.Math.Soc., **259**, 255-280 (1980).

[15] D.Montgomery and L.Zippin: Examples of transformation groups. Proc. Amer.Math.Soc., **5**, 460-465 (1954).

[16] J. Morgan and H. Bass: The Smith conjecture, Academic Press (1984).

[17] P.A. Smith: Transformations of finite period. Ann. of Math., **39**, 127-164 (1938).

[18] P.A. Smith: Transformations of finite period II. Ann. of Math., **40**, 690-711 (1939).

[19] P.A. Smith: Transformations of finite period III. Ann. of Math., **42**, 446-458 (1941).

[20] P.A.Smith: Periodic transformations of 3-manifolds. Illinois J. Math., **9**, 343-348 (1965).

7

良い写像

3次元幾何学的トポロジーとは

*　**幾何学的トポロジー**を直訳すると，幾何学的位相幾何である．学問の名に幾何が2つもはいっているだけあって，幾何的色彩の至って濃いトポロジーである．幾何的色彩が濃いといっても，分野によってあるいは研究者によって濃さや色どりが異なる．私の考えでは，物理と化学に理論物理と実験物理，理論化学と実験化学があるように，理論トポロジーと実験トポロジーがある．もちろん前者が代数的トポロジーで，後者が幾何的トポロジーである．どちらも数学の一分野であるから，理論的でなければならないが，幾何学的トポロジーの研究は職人的な作業が多く，図を繰り返し繰り返し描いて，真実に到達する．3次元の複雑な図形が時間とともに変化（ホモトピー，アイソトピーなど）するので，完全な絵を描くことは不可能であるが，要約した略図や重要な部分だけを描いて考察する．数学は難しい理論と式が並ぶとっつきにくい学問と世間では思っているようだが，3次元幾何(立体幾何）は案外人間的で暖かみのある学問である．3次元ポアンカレ予想は3次元トポロジーの根底にかかわる問題で，「われわれが住んでいる空間は何物か」という素朴な疑問に対するトポロジーの挑戦であり，ホモトピー，アイソトピーは時間と空間の関係を明らかにしたいというトポロジーの願望である．*

7.1　　序

本章では閉 n-多様体 $(n = 1, 2, 3)$ どうしの**連続写像**をよい写像で近似する問題を扱う．その手法は**点集合論的**，**PL**（**組合せ**）**的**，**微分可能的**トポロジーのすべ

ての分野にわたる．“無限と連続”はトポロジーの出発点であり，“連続写像”と“微分可能写像あるいは PL 写像”との距離は遠いが，本章の中心定理（定理 7.3）で任意の連続写像が**良い写像**に修正できることを示した．良い写像は微分可能な写像であり，その証明は**非退化**な PL 写像で近似できることを用いている．主定理は点集合論的，PL 的，微分可能的写像を総合して得られた成果である．$n=3$ の場合なら良い写像の**シンギュラリティー**（singularity）は折返し**閉曲面** F，**分岐閉曲線** B であり，F と B は**折返し分岐点**で**横断的**に交わっている．F と B の各点の近傍では 2 重に写像されていて，折返し分岐点では 4 重に写像されるので，良い写像は局所的には非常に単純である．私の考えでは「良い写像は折返しと分岐をシンギュラリティーにもつ**被覆写像**である」．

定理 7.3 の証明は連続写像と良い写像という 2 つのかなり離れた概念を結びつけるために，職人の手作業ともいえるさまざまなトリックを用いる．トリックというと手品のように聞こえるが，**トリック**は**サージェリー**（surgery；**手術**）に似たものと思っていただきたい．サージェリーは多様体から新しい多様体を作り出すための基本的な操作である．連続写像を非退化な PL 写像に修正し，非退化な PL 写像に $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ -**トリック**，**あみだくじ表示**など，あまり数学的でない名前をつけた手法を用いて，よい写像を手作りする．手作りといっても 3 次元多様体の中で曲面や曲線が絡みあった世界であるから，図に描くことが難しい場合も生じる．頭の中で図を描いては消し，描いては消して，徐々に 1 つずつ仕事を仕上げていかねばならなかった．読者も頭の中に図を描く習慣をつけながらこの章を理解してほしい．

3 次元ポアンカレ予想を考えているうちに良い写像という概念に到達した．トポロジーの原点である無限と連続を再検討する必要があると感じ，**無限を有限化し連続を離散化**するために良い写像を開発した．「$f: S^3 \to M^3$ が写像度 $\neq 0$ の良い写像であれば，シンギュラリティーをもたない良い写像（被覆写像）$g: S^3 \to M^3$ が存在するだろう」という予想は 3 次元ポアンカレ予想と同値である．β -トリックは折返し曲面を解消する操作で至って単純なので，解消の可能性は高いと思われる．残りの分岐曲線を解消することは難問であるが，**スミスの定理**と同値でないかと予想されるので望みを捨てていない．

7.2　良い写像の定義

40 年以上前であるが，3 次元多様体の基本予想や三角形分割問題に熱中したことがあった．その頃に良い写像に似た発想があったが，モイズ (E.E.Moise) や ビング (R.H.Bing) がこれらの難問を解決したので，目標を失い，長い間思い出すこともなかった．その後，いつの間にか 3 次元ポアンカレ予想にのめり込むようになり，3 次元球面 S^3 から 3 次元閉多様体への連続写像のシンギュラリティーを単純化する必要に迫られ，良い写像をふたたび考えることになった．良い写像の定義には点集合のトポロジー（点集合に位相あるいは距離を導入して位相空間を研究する分野（1.1.1 項参照），微分トポロジー，PL トポロジーを基礎とし，それらの領域の用語や概念が混在するので，できるだけ早く慣れてほしい．点集合のトポロジー，微分トポロジー，PL トポロジーを適当に使い分けできるのは，もちろん基本予想，三角形分割問題が 3 次元以下で解けたおかげである．閉 n 次元微分多様体で定義するが，本書で扱うのは 1，2，3 次元多様体のみであり，定義や用語は微分トポロジー的であっても，本当は PL 的考察が根底にある．

【定義 7.1】　M, N が閉微分 n-多様体であるとき，$f: M \to N$ が**良い写像**であるとは，M の各点 p に対し，p と $f(p)$ の局所座標が存在し，$f(p) = f(0, \cdots, 0) = (0, \cdots, 0)$ で，つぎの 4 条件のうちのどれかが，成立することである．

(0)　$f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)$,

(1)　$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1^2, x_2, \cdots, x_n)$,

(2)　$f(z, x_3, \cdots, x_n) = (z^2, x_3, \cdots, x_n)$, $z = x_1 + ix_2$ $(i^2 = -1)$,

(3)　$f(x_1, z, x_4, \cdots, x_n) = (x_1^2, z^2, x_4, \cdots, x_n)$, $z = x_2 + ix_3$ $(i^2 = -1)$

p が (0), (1), (2), (3) の条件を満たすとき，それぞれ f の**正則点**，**折返し点**，**分岐点**，**折返し分岐点**とよび，正則点以外の点を**特異点**とよぶ．折返し点，分岐点，折返し分岐点の集合をそれぞれ F，B，FB と書く．つぎの命題は明らかである．

【命題 7.2】　$\mathrm{cl}\,(F) = F \cup FB, \mathrm{cl}\,(B) = B \cup FB, FB$ はそれぞれ M の $n-1$ 次元，

$n-2$ 次元，$n-3$ 次元閉部分多様体で，cl (E) と cl (B) は FB で**横断的**に交わる．

特異点の集合 $F \cup B \cup FB$ を f の**シンギュラリティー**とよぶ．特異点集合は大げさな感じがするのでシンギュラリティーを使うことにする．本章の目標はできるだけシンギュラリティーを単純にし，見やすくすることにあって，そのためにホモトピー，ε-ホモトピー，トリック等を使う．ε は十分小さい正数を意味し，N を距離空間と見なし，写像を ε-ホモトピーでほんの少しずらして（像の各点をずらす距離は ε 以下），シンギュラリティーの像の交わりを単純にすることを**一般の位置に置く**という．一般の位置に置くと，n 次元多様体の中の i 次元と j 次元の図形どうしの交わりは $i+j-n$ 次元に抑えることが可能である．たとえば M^3, N^3 が 3 次元多様体のとき，良い写像 $f: M^3 \to N^3$ のシンギュラリティーは折返し曲面，分岐曲線，折返し分岐点となるが，折返し曲面像どうしの交わり（自己交叉も）は曲線，折返し曲面像と分岐曲線像の交わりは点，分岐曲線像どうしは交わらない．一般の位置に置くことと横断的に交わることは似た概念である．図 7.1 は折返し分岐点 o の近傍とその像の図で巻頭の色刷の図と同じであるが

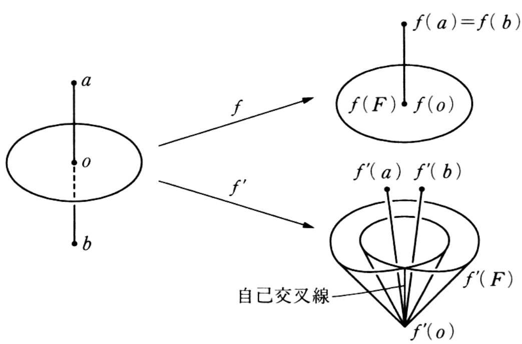


図 7.1　折返し分岐点

f は定義のまま，f' は f を ε-ホモトピーで一般の位置に修正してある．ディスク F は折返し曲面，線分 ab は分岐線である．f では F の像 $f(F)$ が 2 重に写像されてディスク $f(F)$ となり，ab は $f(o)$ で折返して 2 重に写像されて分岐線像

$f(ao) = f(bo)$ となっている．一般の位置に置いた f' は f では 2 重のところを分離したのでかえって図は複雑になったが，$f'(F)$ は 1 本の自己交叉線以外では交わらず，$f'(ao)$ と $f'(bo)$ は折返し分岐点像 $f'(o)$ 以外では交わらない．実際に折返し分岐点像を考えるときは，f' またはそれを適当に変形した図で考える．

良い写像の特徴はいろいろあるが，まずシンギュラリティーの近傍が 2 重に写像されることである．折返し点の近傍が 2 重に写像されるのは当然であるが，分岐点の近傍も分岐点を中心として 2 回転するように写像されている．これは n 重の分岐点を $n-1$ 個の 2 重分岐点に分離できるからである．もうひとつの特徴をあげると，1 次元，2 次元，3 次元の良い写像が段階的に構成できることがある．それは定理 7.3，補題 7.6 などの証明を読めば理解できるはずである．しかし，3 次元と 4 次元の間には相当ギャップがあるらしく，4 次元以上では定義はできたが，役に立つかどうか見当がつかない．

7.3 良い写像による近似

つぎの定理が 7 章の主定理である．

【定理 7.3】 M, N は閉じた有向 n-多様体（$n = 1, 2, 3$）で，$f : M \to N$ が連続写像であれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，f と ε-ホモトピックな良い写像 $g : M \to N$ が存在する．

定理 7.3 を本章の主定理とする理由は，私の目標「$f : S^3 \to M^3$ が写像度 $\neq 0$ の連続写像であるとき，M^3 は何物か？」を考えるとき，連続写像 f を良い写像 g に置き換えることができるからである．定理 7.3 は補題 7.6 を用いて証明するが，補題 7.6 の証明が 7 章の主要な部分である．

3 次元以下の多様体は三角形分割可能であるから，M, N は PL（組合せ）多様体としてよい．したがって連続写像を離散化するつぎの命題が強力な助っ人となる（1.7.2 項参照）．

【命題 7.4】 M, N を閉 PL n-多様体，$f : M \to N$ が連続写像であれば，f と ε-

ホモトピックな非退化な PL 写像 $g: M \to N$ が存在する（1.7.2 項参照）.

上述の命題は次元 n に制限なしで成立するが，本章は 3 次元多様体をおもに扱うので PL 3-多様体で復習をする．PL 多様体は組合せ多様体とほとんど同じで，PL は区分的線形（piecewise linear）の略で，$\mathbf{R}^3$ の線形的（linear）構造をもつ 3-単体（四面体）を石垣を積むようにきちんと組み合わせてできる図形である．コンパクト 3-多様体では組み合わせる 3-単体の個数が有限である．3-単体の面（2-単体），辺（1-単体），頂点（0-単体）もすべてその 3-単体の属する組合せ 3-多様体の構成要素である．

組合せ 3-多様体 K においては，2-単体（三角形）は必ず 2 つまたは 1 つの 3-単体の面になっていて，とくにちょうど 1 つの 3-単体の面である 2-単体をすべて集めた図形は K の境界とよばれ，∂K と書く．∂K は組合せ 2-多様体である．$\partial K = \phi$ でコンパクトな場合に K を閉じた組合せ 3-多様体という．単体に正，負の向きを定めることができるが，3-単体のすべてに整合性を保つように向きを定めることができるとき K を**有向組合せ 3-多様体**という．有向組合せ 3-多様体 K の境界 ∂K は有向組合せ 2-多様体である．本章で扱う 3-多様体はすべてコンパクト有向 PL 3-多様体であるし，三角形分割の可能性や微分構造のはいることも保証されているので，PL，組合せ，可微分，有向，コンパクトなどの形容詞は省略することが多い．

K, L を組合せ 3-多様体とするとき，非退化単体写像 $f: K \to L$ では K の単体は L の同次元の単体に写像され，K の 2 単体の間の面，辺，頂点であるという関係も保たれて L に写像される．非退化 PL 写像 $f: M \to N$ では，M, N の単体分割 K, L が存在し，$f: K \to L$ が非退化単体写像となっている．K の 3-単体 ξ^3 は線形な同相写像で L の 3-単体 $\eta^3 = f(\xi^3)$ に写像されるので，M と N の PL 構造どうしの関係がわかりやすい．命題 7.4 は連続写像を離散化するために非常に有効である．

非退化 PL（単体）写像を紹介したついでに，本書の大目標である「S^3 から有向閉 3-多様体 M^3 への連続写像の写像度が 0 でないとき，M^3 は何物か？」という問題の中で使われる有向とか写像度をわかりやすく解説しよう．まず M^3 は連

結でなければこの問題は意味がない．しかし，連結性は当然として条件から省略するのが普通である．組合せ 3-多様体 K において，2 つの 3-単体 ξ_1^3 と ξ_2^3 が 1 つの 2-単体（三角形）を面として共有するとき，ξ_1^3 と ξ_2^3 は隣り合うという．K の任意の 2 つの 3-単体がつぎつぎと隣り合う 3-単体の列で結べることが K の連結性を意味する．

K の有向性についてはすでに触れたが，もう少し詳しく述べよう．3-単体 ξ^3 に 2 つの向きがあって，1 つの向きを決めると，境界 $\partial\xi^3$ の 4 つの 2-単体の向きも定まる．ゆえに ξ^3 の向きは図 7.2 のように，面の向きで決まるともいえる．一方を

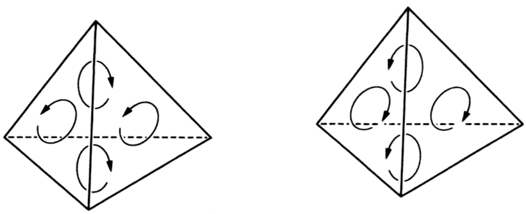


図 7.2 ξ^3 の 2 つの向き

正の向きとすると他方を負の向きとよぶ．隣り合った有向 3-単体 ξ_1^3, ξ_2^3 において共通面の正の向きどうしが異なるとき，**同調** するという．K のすべての 3-単体に向きを定め，隣り合うものどうしは同調するとき，K は**有向**であるという．3-球面 S^3，3-球を単体分割すると，もちろん有向組合わせ 3-多様体となる．

閉有向 n -多様体どうしの連続写像の写像度はホモロジーを使って定義される．したがって 2 つの連続写像がホモトピックなときは写像度は一致する．閉有向 3-多様体の間の連続写像は ε -ホモトピックな非退化単体写像 $f: K \to L$ で近似できるので，f の写像度が計れる．もちろん K, L は連結とする．L の任意の 3-単体を η^3 とし，η^3 に写像される K の 3-単体で正の向きが η^3 の正（負）の向きに写像されるものの個数を $d_+(\eta^3)(d_-(\eta^3))$ とする．$d_+(\eta^3) + d_-(\eta^3)$ は η^3 の内点 p では写像 f の重複度を表すので，p における**幾何的写像度**とよび，$d_f(p)$ と書く．$d_+(\eta^3) - d_-(\eta^3)$ は η^3 に関係なく f によって定まるので（**代数的**）**写像度**とよび，$d(f)$ と書く．

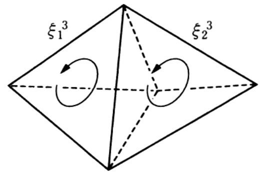


図 7.3　ξ_1^3 と ξ_2^3 は同調

問題 7.1　$d_+(\eta^3) - d_-(\eta^3)$ は η^3 の選び方によらず一定であることを示せ.

命題 7.4 を用い主定理 7.3 を証明するために，組合せ 3-多様体 K の局所的性質を表す**リンク**という言葉を紹介する．K の 1-単体 $\varepsilon^1 = ab$ に対し，ab を辺とする K の 3-単体（図では 5 つある）の ab を対辺をつないでできる折線を ab のリンクとよび，$\mathrm{Lk}(\varepsilon^1, K)$ と書く．ξ^1 が境界 ∂K に含まれるときにリンクは B^1（折線）で，ξ^1 が ∂K に含まれないとき，リンクは S^1（閉折線）である．頂点 ξ^0 に対しても，ξ^0 を頂点とする 3-単体の対面をつなぎ合わせた図形を ξ^0 の**リンク**とよび，$\mathrm{Lk}(\xi^0, K)$ と書く．$\mathrm{Lk}(\xi^0, K)$ がディスク B^2 のとき ξ^0 は ∂K に属し，$\mathrm{Lk}(\xi^0, K)$ が S^2 のとき ξ^0 は K の内部にある．$\xi^1 = ab$ の中点 0 と $\mathrm{Lk}(\xi^1, K)$ を結んでできる図形（join）を ξ^1 のノーマルディスク（normal disk）という.

補題 7.6 を述べるため，良い写像の定義を拡張する．M, N が境界をもつコンパクト n -多様体とする．M, N の内部 $M - \partial M, N - \partial N$ をそれぞれ $\mathrm{Int}\ M, \mathrm{Int}\ N$ と書く．写像 $f : M \to N$ が**プロパー**とは，$f(\partial M) \subset \partial N, f(\mathrm{Int}\ M) \subset \mathrm{Int}\ N$ を満た

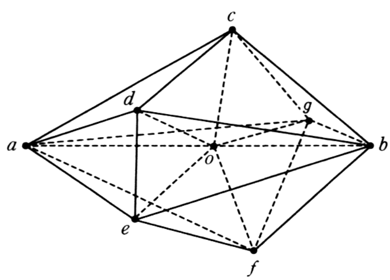


図 7.4　閉折線 $cdefg$ がリンク．o を頂点，リンクを底とする錐がノーマルディスクである.

すことである．$f:M\to N$ がプロパーであるとき，M,N のコピー $M',N'\,(\partial M=\partial M',\partial N=\partial N')$ と f のコピー $f':M'\to N'\,(f'|\partial M'=f|\partial M')$ をつくり，$f'':M\cup M'\to N\cup N'$ を $f''|M=f, f''|M'=f'$ で定義するとき，f'' を f の**ダブル**とよぶ．

【**定義 7.5**】 M,N が境界をもつコンパクト n-多様体で $f:M\to N$ がプロパーで，f のダブルが良い写像のとき，f を良い写像という．

つぎの補題が 7 章のキー・レンマである．7.4, 7.5, 7.6, 7.7 節のすべてがこの補題の証明に費される．

【**補題 7.6**】 $n=2,3$ であるとき，$(n-1)$-球面 S^{n-1} から $(n-1)$-球面 $\widetilde{S}^{n-1}$ への良い写像は n-球 B^n から n-球 $\widetilde{B}^n$ への良い写像に拡張できる．

主定理 7.3 の証明　M,N は閉じた有向 n-多様体（$n=1,2,3$）であるとする．命題 7.4 より，M,N の単体分割 K,L が存在し，$f:K\to L$ は非退化単体写像としてよい．$n=1$ の場合は f は良い写像である．なぜなら K の任意の 1-単体 ε^1 は L の 1-単体 η^1 に同相に写像されるから，ξ^1 の内点で f は正則である．K の 0-単体 ξ^0 を頂点とする 2 つの 1-単体 ξ_1^1,ξ_2^1 は f により，L の 0-単体 $\eta^0=f(\xi^0)$ を頂点とする 2 つのまたは 1 つの 1-単体に同相に写像される．ゆえに前者の場合は ξ^0 は正則点，後者の場合は ξ^0 は折返し点であるから f は良い写像である．

$n=2$ の場合は $n=1$ の場合と同じ理由で K の 2-単体の内点は f の正則点，1-単体の内点は正則点または折返し点である．したがって K の 0-単体 v の十分小さな近傍で f を ε-ホモトピーで修正する．リンク $\mathrm{Lk}\,(v,K)$ を v を中心として相似に十分小さくした図形を境界とするディスクを $\mathrm{St}(v)$（十分小さいスター近傍）とする（図 7.5）．$\mathrm{St}(v)$ の境界 $\partial\mathrm{St}(v)$ における制限写像 $f|\partial\mathrm{St}(v)$ はすでに良い写像である．補題 7.6 $(n=2)$ を用いて $f|\partial\mathrm{St}(v)$ を良い写像 $g_v:\mathrm{St}(v)\to\mathrm{St}(f(v))$ に拡張する．$\mathrm{St}(f(v))$ はやはり十分小さい $f(v)$ の星状近傍である．写像 $g:M\to N$ を，$g|\mathrm{St}(v)=g_v, g|M-\bigcup_{v\in k}\mathrm{St}(v)$ で定義すれば g は求める良い写像である．

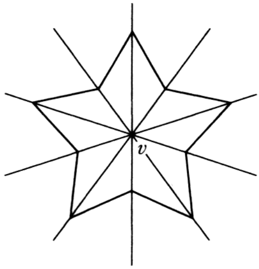


図 7.5　St(v)

$n=3$ の場合も非退化な写像 f は K の **1-スケルトン** $K^{(1)}$（K の1-単体のつくる図形）以外の点で正則または折返しとなっているので，$K^{(1)}$ に十分近い近傍で修正する．まず K の頂点以外で良くする．K の任意の1-単体を $\xi^1=ab$, ab の中点を o とする．ab のノーマルディスクを o を中心として相似に十分小さくしたディスク D とすると，$f|\partial D$ は良い写像である．補題 7.6 ($n=2$) により $f|\partial D$ を D における良い写像 g_D に拡張する．D を $\{a,b\}$ から**懸垂**した図形（a,b を頂点，D を底とする2つの錐を合併したもの）を ξ^1 の十分細いスター近傍 $\mathrm{St}(ab)$ ということにする．良い写像 g_D を $\{a,b\}$ から懸垂して写像 g_{ab} をつくる．$g_{ab}|\partial \mathrm{St}(ab)=f|\partial St(ab)$

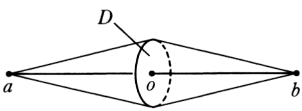


図 7.6　St(ab)

であり，g_{ab} は a,b 以外の点で正則である．f をすべての1-単体 ab の十分細いスター近傍 $\mathrm{St}(ab)$ で修正すると写像 $g':M\to N$ を得て，g' は K の頂点集合 $K^{(0)}$ 以外では正則となる．$n=2$ の場合と同じように，K の各頂点 v の十分小さいスター近傍 $\mathrm{St}(v)$ において補題 7.6 ($n=3$) を用いて修正すると，求める良い写像 $g:M\to N$ を得る．■

問題 7.2　g_{ab} と $f|\mathrm{St}(ab)$ は $f|\partial\mathrm{St}(ab)$ を動かさず，ε-ホモトピックにできることを確めよ．

7.4　補題 7.6 (n=2) の証明

$f: S^1 \to \widetilde{S}^1$ を円 S^1 から円 $\widetilde{S}^1$ への良い写像として，f をディスク（円板）B^2 からディスク $\widetilde{B}^2$ への良い写像に拡張することが，本節の内容である．$S^1, \widetilde{S}^1$ は 1 次元だから f のシンギュラリティーは偶数個の折返し点である．この節で始めてトリックという数学らしくない言葉を使うが，幾何の研究には論理的には説明しにくい職人的作業を伴う．トリックはサージェリー（手術）に似ていてさらに職人的である．初等幾何では補助線を 1 本引いたおかげで問題が一挙に解決する楽しさを味わった人は多いと思う．読者もトリックを使ったり，発明することを楽しんでほしい．

(1) f に折返し点がない場合は k ($\neq 0$) 重の被覆写像である．もちろん $S^1, \widetilde{S}^1$ の中心 $o, \widetilde{o}$ をそれぞれ k 重の分岐点，分岐点像として，f を B^3 から $\widetilde{B}^3$ への分岐被覆写像に拡張できるが，良い写像の分岐点はすべて 2 重であるから，k 重の分岐点を $k-1$ 個の 2 重の分岐点に分離する．

図 7.7 は $k=6$ の図である．f は S^1（中心 o の単位円）から $\widetilde{S}^1$（中心 $\widetilde{o}$ の単位円）への角度を k 倍にする写像と考えて一般性を失わない．図の星形の図形

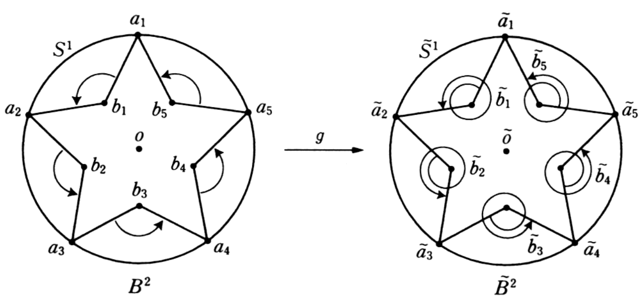


図 7.7

$a_1b_1\cdots a_{k-1}b_{k-1}$ を図形 $\widetilde{a}_1\widetilde{b}_1\cdots\widetilde{a}_{k-1}\widetilde{b}_{k-1}$ に合同に写像し，扇形 $a_ib_ia_{i+1}(i=1,\cdots,k-1)$ を扇形 $\widetilde{a}_i\widetilde{b}_i\widetilde{a}_{i+1}$ では2重に，$\widetilde{B}_2$ から扇形 $\widetilde{a}_i\widetilde{b}_i\widetilde{a}_{i+1}$ を除いた部分に一重に写像すればよい．できた写像 $g: B^2 \to \widetilde{B}^2$ では，$b_1,\cdots,b_{k-1}$ が分岐点で，それ以外の点は正則点となる．

(2) **α-トリック**（図7.8）：このトリックはもっとも簡単であるが，文章に書くと長くなる．S^1 を2点 a_1, a_2 で折返して半円 B^1 $(\partial B^1 = a_1' \cup a_2')$ に写す写像 $f_1: S^1 \to B^1$ があり，a_1, a_2 を両端とする2つの孤 A_1, A_2 は同相に B^1 に写され，さらに B^1 を局所同相に円 $\widetilde{S}^1$ に写像する $f_2: B^1 \to \widetilde{S}^1$ が存在し，f が f_1 と f_2 の合成写像 $f = f_2 \circ f_1$ となっているとする．$\{a_1, a_2\}$ を f の**折返し点の α-対**とよぶ．D を半円 B^1 と直経 $a_1'a_2'$ を境界とする半円板とし，弦 a_1a_2 が折返し曲線となるように写像 $g_1; B^2 \to D$ をつぎのようにつくる．$g_1|A_1 = f_1|A_1, g_1|A_2 = f_1|A_2, g_1(a_1a_2) = a_1'a_2', A_1\ (A_2)$ と弦 a_1a_2 の囲むディスク $D_1\ (D_2)$ は D に同相に写像する．さらに D から $\widetilde{B}^2$ $(\partial\widetilde{B}^2 = \widetilde{S}^1)$ への局所同相写像 g_2 をつぎのようにつくる．$g_2|B^1 = f_2, g_2(a_1'a_2')$ は $\widetilde{B}^2$ でプロパー（$g_2(a_1'a_2') \cap \widetilde{S}^1 = g_2(a_1') \cup g_2(a_2') = a_1'' \cup a_2''$）である．$g = g_2 \circ g_1$ とおくと，$g: B^2 \to \widetilde{B}^2$ が求める良い写像である．図の説明であるが，図7.8の $\widetilde{B}^2$ の図で $f_2(B^1)(\subset \widetilde{S}^1 = \partial\widetilde{B}^2)$ の平行に走っている部分は $\widetilde{S}^1$ の上で重なっているのをわかりやすく描いたつもりである．f を g に拡張することを **α-トリック**とよぶ

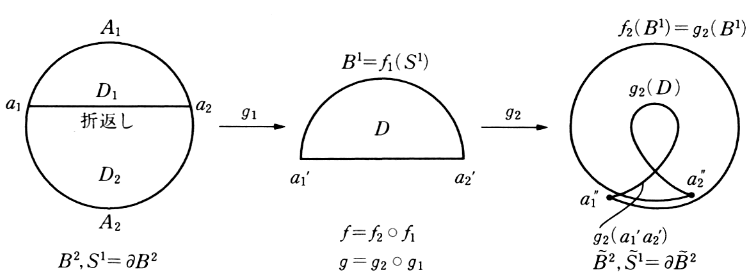


図 7.8　α-トリック $g|S^1 = f$

(3) **$\boldsymbol{\beta}$ -トリック**：このトリックは良い写像を開発する出発点となったもので，いわゆるホイットニー (Whitney) のカスプ (cusp) を折返し曲線と分岐点に分離するトリックである．$f: S^1 \to \widetilde{S}^1$ の図 7.9 のような隣り合う折返し点 $\{a_1, a_2\}$ を**折返し点の $\boldsymbol{\beta}$-対**とよぶ．β-対をホモトピーで近づけていき，一致させると，折返しが消える．このホモトピーを B^2 と $\widetilde{B}^2$ の同心円上で実現したときにホイットニーのカスプ w が生じる．しかしホイットニーのカスプは良い写像の特異点ではない．

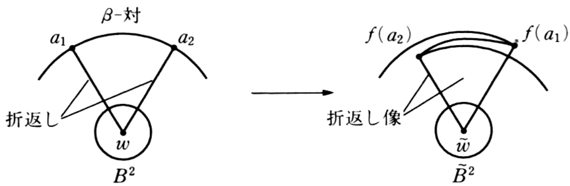


図 7.9　ホイットニーのカスプ

ホイットニーのカプス w とその像 $\widetilde{w}$ の十分小さいディスク近傍 $B^2, \widetilde{B}^2$ をとると，$B^2, \widetilde{B}^2$ の境界 $S^1, \widetilde{S}^1$ における制限写像は十分近い β-対 $\{a_1, a_2\}$ をもつ良い写像なので，それを $f: S^1 \to \widetilde{S}^1$ として **$\boldsymbol{\beta}$ -トリック**を行い，f を良い写像 $g: B^2 \to \widetilde{B}^2$ に拡張する（図 7.10）．$g_1: B^2 \to D$ は分岐点が b 1 つのみの 2 重分岐被覆，$g_2: D \to \widetilde{B}^2$ は $\widetilde{F} = g_1(F)$ を折返し曲線とする折返し写像とする．g_1, g_2 の合成写像を $g = g_2 \circ g_1$ とすると，これは分岐点 b と折返し曲線 F をもつ良い写像となる．β -トリックはホイットニーのカスプの近傍を修正する局所的な操作である．

補題 7.6 ($n=2$) の証明　$S^1, \widetilde{S}^1$ を単位円，$f: S^1 \to \widetilde{S}^1$ は良い写像で，$2k$ 個（$k>0$）の折返し点をもつとする．$k>1$ なら f は折返し点の β-対 $\{a_1, a_2\}$ をもつとしてよい．なぜなら，隣りどうしの折返し点像を近寄せて β-対 にするホモトピーが存在し，ホモトピーを同心円を小さくしながら実現すると，f は $S^1, \widetilde{S}^1$ の正則近傍のアニュラスの間の良い写像に拡張できるからである．β -トリックを行うと，f は $S^1, \widetilde{S}^1$ の正則近傍のアニュラス A_1 から $\widetilde{A}_1$ への良い写像 $g_1: A_1 \to \widetilde{A}_1$ に拡張され，制限写像 $f_1 = g_1|\partial A_1 - S^1$ は円 $S_1^1 = \partial A_1 - S^1$ から円 $\widetilde{S}_1^1 = \partial \widetilde{A}_1 - \widetilde{S}^1$

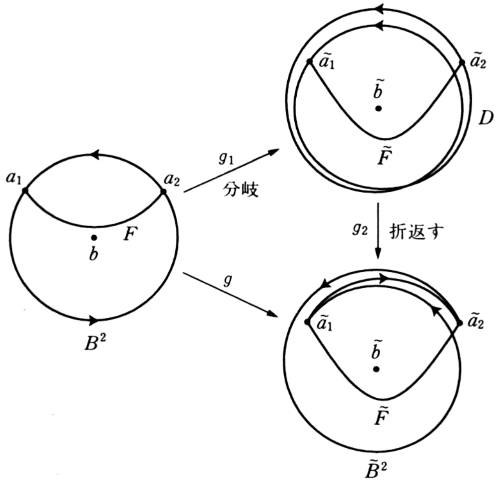


図 7.10 β-トリック

への良い写像となり，a_1, a_2 $(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2)$ を両端とする折返し曲線 (像) は A_1 $(\widetilde{A}_1)$ の内部でつながって1つの折返し曲線 (像) となり，$A_1(\widetilde{A}_1)$ の内部に分岐点 (像) が1つ生じ，$f_1 : S^1_1 \to \widetilde{S}^1_1$ の折返し点の個数は $2(k-1)$ となる．β-トリックを $k-1$ 回繰り返すとアニュラス A_1 $(\widetilde{A}_1)$ は拡張されて A_{k-1} $(\widetilde{A}_{k-1})$ となり，f は良い写像 $g_k : A_{k-1} \to \widetilde{A}_{k-1}$ に拡張され，$S^1_{k-1} = \partial A_{k-1} - S^1, \widetilde{S}^1_{k-1} = \partial \widetilde{A}_{k-1} - \widetilde{S}^1$ とおくと，制限写像 $f_{k-1} = g_{k-1}|S^1_{k-1}$ は折返し点が2個の良い写像となる．この2個の折返し点が α-対の場合は α-トリックを行って，g_{k-1} は良い写像 $g : B^2 \to \widetilde{B}^2$ に拡張され，g が求める写像となる．

$f_{k-1} : S^1_{k-1} \to \widetilde{S}^1_{k-1}$ の2個の折返し点が β-対の場合はさらに β-トリックを行うと，g_{k-1} は $g_k : A_k \to \widetilde{A}_k$ に拡張され，制限写像 $f_k = g_k|\partial A_k - S^1 : \partial A_k - S^1 \to \partial\widetilde{A}_k - \widetilde{S}^1$ は i 重 $(i > 0)$ の被覆写像となるので，(1) により $i-1$ 個の分岐点を加えて求める良い写像 $g : B^2 \to \widetilde{B}^2$ を得る． ■

7.5　補題 7.6 (n=3) に使うトリック

$f : S^2 \to \widetilde{S}^2$ を良い写像とする．f を良い写像 $g : B^3 \to \widetilde{B}^3$ に拡張するためにはさまざまなトリックが必要である．$n=2$ の場合と大筋は似ているが，1 次元高いだけ複雑になる．α -トリック，β -トリックを使って写像を拡張すると，折返し曲線が単純になる．γ -トリックは分岐点の対を消し，γ' -トリックは分岐点の対と折返し閉曲線の組を消し，δ -トリックは分岐点の対と折返し曲線像のループを消す．

7.5.1　α -トリック

S^2 上の閉曲線 L (図 7.11 では赤道) があって，L は折返し閉曲線のひとつ F と 2 点 a_1, a_2 で横断的に交わり，それ以外のシンギュラリティーは L 上にないものとする．L の点 a_1, a_2 を両端とする 2 つの弧 L_1, L_2 は，$\widetilde{S}^2$ の $\widetilde{a}_1 = f(a_1), \widetilde{a}_2 = f(a_2)$

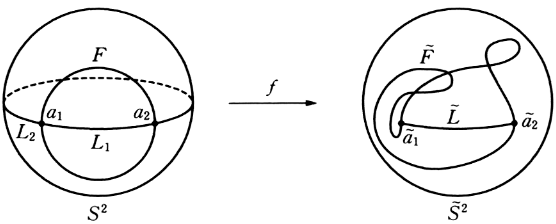


図 7.11　$L = L_1 \cup L_2$

を両端とする緯線上の 1 つの弧 $\widetilde{L}$ に，それぞれが同相に写像されているものとする．**α -トリック**は大域的な操作で，それを行ったあとは図 7.12 のように S^2 が B^3 の内部の S_1^2 と S_2^2 に分離し，$\widetilde{S}^2$ が $\widetilde{B}^3$ の内部の $\widetilde{S}_*^2$ となり，F が F_1,F_2 に分離し，F の像 $\widetilde{F}$ は F_1 の像 $\widetilde{F}_1$，F_2 の像 $\widetilde{F}_2$ に分離する．L より北（南）にあるシンギュラリティーは S_1^2 (S_2^2) に移り，$\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2$ 以外のシンギュラリティー像は $\widetilde{S}^2$ から $\widetilde{S}_*^2$ に射影されたものである．$S_1^2, S_2^2, \widetilde{S}_*^2$ を境界とする 3-球をそれぞれ $B_1^3, B_2^3, \widetilde{B}_*^3$，また $A^3 = \mathrm{cl}(B^3 - B_1^3 \cup B_2^3), \widetilde{A}^3 = \mathrm{cl}(\widetilde{B}^3 - \widetilde{B}_*^3)$ とおく．$g : A^3 \to \widetilde{A}^3$ は f を拡張した良い写像であり，制限写像 $g|S_i^2 (i=1,2)$ は S_i^2 を $\widetilde{S}_*^2$ に移す．

図 7.13 において，R は L の張るディスク D の正則近傍であり，$\widetilde{R} = g(R)$ とする．S_1^2 (S_2^2) は R の北 (南) にあり，$\widetilde{R}$ と $\widetilde{S}_*^2$ は交わらない．R は F を拡張し

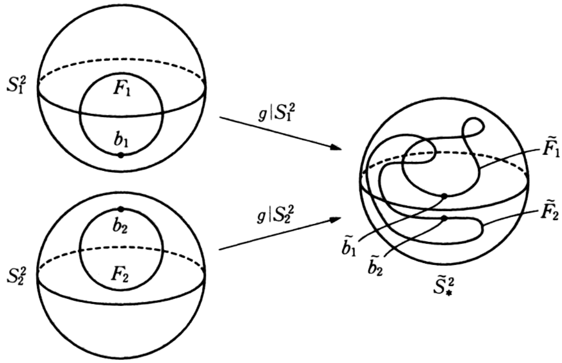


図 7.12

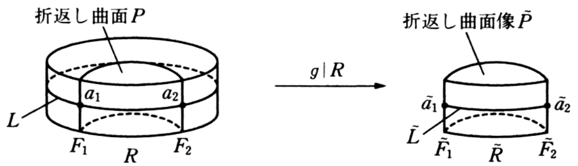


図 7.13

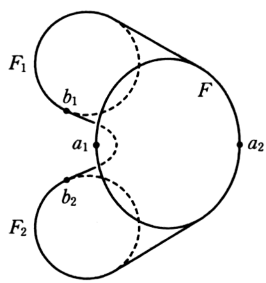


図 7.14

た折返し曲面と R との交わり P で折り返されて $\widetilde{R}$ にうつり，R $(\widetilde{R})$ における g のシンギュラリティー (像) は P $(\widetilde{P})$ のみである． $\mathrm{cl}(A^3-R)$ の北 (南) の部分を Q_1 (Q_2), $\mathrm{cl}(\widetilde{A}^3-\widetilde{R})=\widetilde{Q}$ とすると，$\widetilde{Q}=g(Q_1)=g(Q_2)$ で，F と F_1, F_2 をつな

ぐ折返し曲面は図 7.14 のようにパンツ状になる．F 以外の S^2 ($\widetilde{S}^2$) 上の各特異点 (像) は S_1^2, S_2^2 ($\widetilde{S}_*^2$) へ射影する垂線に拡張される．f が $g: A^3 \to \widetilde{A}^3$ に拡張できる理由は $g|Q_1: Q_1 \to \widetilde{Q}$ と $g|Q_2: Q_2 \to \widetilde{Q}$ に分離できるからである．

問題 7.3　$g|Q_1 : Q_1 \to \widetilde{Q}, g|R : R \to \widetilde{R}, g|Q_2 : Q_2 \to \widetilde{Q}$ が $g|Q_1 \cap R : Q_1 \cap R \to \widetilde{Q} \cap \widetilde{R}$ と $g|Q_2 \cap R : Q_2 \cap R \to \widetilde{Q} \cap \widetilde{R}$ で整合するように g をつくれることを確めよ．

7.5.2　$\boldsymbol{\beta}$ -トリック

$\boldsymbol{\beta}$ -トリック（図 7.15）は局所的な操作で，$\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2$ は折返し曲線像と $\widetilde{S}^2$ の緯線の横断的交点で，S^2 の弧 c_2c_1 は折返し点 a_1a_2 以外は f のシンギュラリティーを含まず，弧 c_2a_1, a_1a_2, c_1a_2 は弧 $\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2$ に同相写像されているとき，$\{a_1, a_2\}$ を折返し点の β- 対とよび，β -トリックを行い，S^2 とその同心球面 S_*^2 に囲まれる

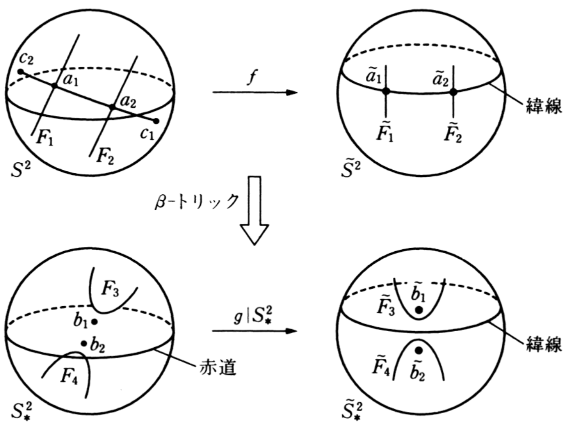


図 7.15　β-トリック

3-多様体 A^3 から $\widetilde{S}^2$ とその同心球面 $\widetilde{S}_*^2$ に囲まれる 3-多様体 $\widetilde{A}^3$ への良い写像 $g: A^3 \to \widetilde{A}^3$ に f が拡張される．図 7.16 の上の図はすでに使った2次元の β -トリック (下の図) を線分 m_1m_2 ($\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2$) を軸として 180° 回転したものと思っていただきたい．A^3 ($\widetilde{A}^3$) に鞍部を 1 つもつ折返し曲面 (像) と，その下 (上) に極大点を 1 つもつ分岐曲線 (像) がある．F_1, F_2 ($\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2$) は S^2 ($\widetilde{S}^2$) にのっていて，

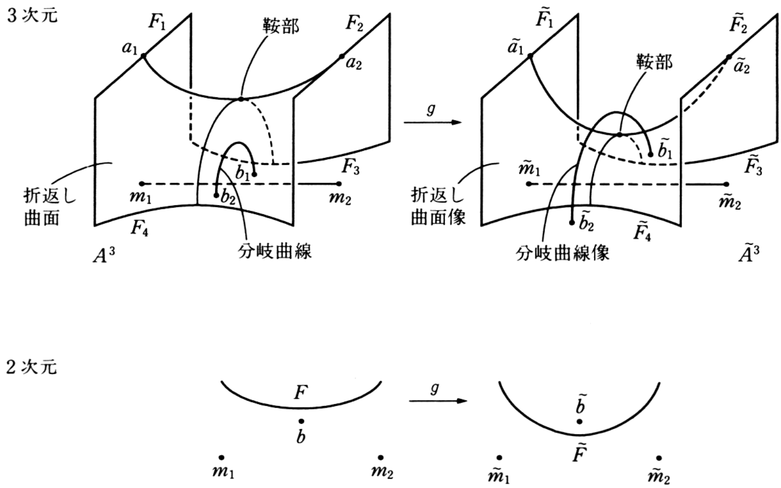


図 7.16　β-トリック後のシンギュラリティー (像)

$F_3, F_4, b_1, b_2, (\widetilde{F}_3, \widetilde{F}_4, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2)$ は S_*^2 $(\widetilde{S}_*^2)$ の上にのっている．図 7.16 以外の g のシンギュラリティー (像) は S^2 $(\widetilde{S}_*^2)$ から S_*^2 $(\widetilde{S}_*^2)$ に f のシンギュラリティー (像) を射影するように拡張される．β-トリックは3次元ポアンカレ予想攻略の中心になる武器と思っている．

7.5.3　γ-トリック

γ-トリックを行うと，分岐点の γ- 対 $\{b_1, b_2\}$ が消える．α-トリックと同様に大域的操作で，S^2 が2つの S_1^2 と S_2^2 に分離するが，α-トリックより単純である．b_1, b_2 は良い写像 $f: S^2 \to \widetilde{S}^2$ の2つの分岐点で，閉曲線 L (図 7.17 では赤道) の

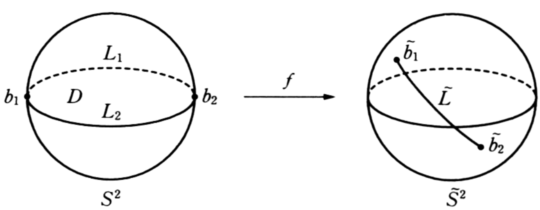


図 7.17

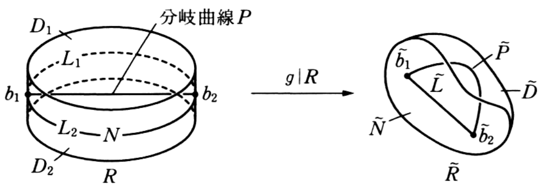


図 7.18

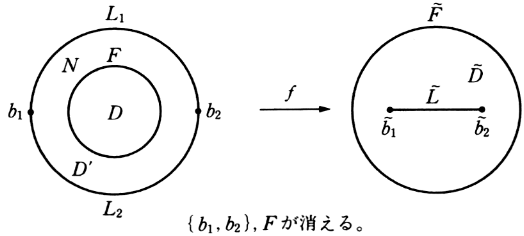
上にあり，L は b_1, b_2 により 2 つの弧 L_1, L_2 に分けられいて，L 上には b_1, b_2 以外のシンギュラリティーはなく，制限写像 $f|L$ は L_1, L_2 を同相に b_1, b_2 を結ぶ $\widetilde{S}^2$ 上の $\widetilde{L}$ に写像している．

$g : A^3 \to \widetilde{A}^3$ をつくる前に $L = L_1 \cup L_2$ を張るディスク D の正則近傍 R における制限写像 $g|R$ を図 7.18 のようにつくる．b_1, b_2 を結ぶ直径 P が分岐曲線となり，R と S^2 との交わりのアニュラス N は $g|R$ により，$\widetilde{R}$ と $\widetilde{S}^2$ の交わりのディスク $\widetilde{N}$ に写像される．$\mathrm{cl}(\partial R - N)$ の 2 つのディスク D_1, D_2 は $\widetilde{B}^3$ ($\widetilde{S}^2 = \partial\widetilde{B}^3$) のプロパーなデイスク $\widetilde{D}$ に同相写像され，分岐曲線 P の像 $\widetilde{P}$ も $\widetilde{B}^3$ の自明でプロパーな弧となる．

S_1^2 (S_2^2) は R より北 (南) にあり，$\widetilde{S}_*^2$ は $\widetilde{B}^3$ の内部の同心球面 $S_1^2 = \partial B_1^3, S_2^2 = \partial B_2^3, \widetilde{S}_*^2 = \partial\widetilde{B}_*^3$ とする．$A^3 = \mathrm{cl}(B^3 - B_1^3 \cup B_2^3), \widetilde{A}^3 = \mathrm{cl}(\widetilde{B}^3 - \widetilde{B}_*^3)$ とおき，$\mathrm{cl}(A^3 - R)$ の北 (南) にある部分を $Q_1, (Q_2), \widetilde{Q} = \mathrm{cl}(A^3 - \widetilde{B}_*^3)$ とおいて $g|Q_1 : Q_1 \to \widetilde{Q}, g|Q_2 : Q_2 \to \widetilde{Q}$ をすでにつくった $g|R : R \to \widetilde{R}$ と整合するようにつくると $g : A^3 \to \widetilde{A}^3$ が完成する．要するに γ-対 $\{b_1, b_2\}$ が R の中で分岐曲線 P で結ばれ，他のシンギュラリティーはそのまま拡張されるだけなので，α -トリックより γ -トリックのほうがわかりやすい．

7.5.4 γ' -トリック

γ' -トリックは局所的な操作で，分岐点の γ-対 $\{b_1, b_2\}$ と折返し閉曲線 F が



$\{b_1, b_2\}, F$ が消える。

図 7.19 $\{b_1, b_2\}, F$ とその像が消える γ' -トリック

一度に消えるトリックである．図 7.19 では $S^2, \widetilde{S}^2$ を平面として図を描いてある．分岐点の γ-対 $\{b_1, b_2\}$ は S^2 の閉曲線 $L = L_1 \cup L_2$ に含まれ，L の囲む S^2 の 1 つのディスク D' の中に折返し閉曲線 $F = \partial D$ があり D' の内部のシンギュラリティーは F のみである．F の像 $\widetilde{F} = f(F)$ は $\widetilde{S}^2$ の 1 つのディスク $\widetilde{D}$ の境界で，$f|D : D \to \widetilde{D}$ は同相写像である．b_1, b_2 で分けられた L の 2 つの弧 L_1, L_2 は b_1, b_2 の像 $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2$ を結ぶ弧 $\widetilde{L}$ に同相写像され，アニュラス $\mathrm{cl}\,(D' - D) = N$ とすると $f(N) = \widetilde{D}$ となっている．このとき $\{b_1, b_2, F\}$ を **γ'-組**とよぶ．

f を良い写像 $g : A^3 \to \widetilde{A}^3$ に拡張する．$\partial A^3 - S^2 = S^2_*, \partial\widetilde{A}^3 - \widetilde{S}^2 = \widetilde{S}^2_*$ はともに 2-球面で，$g|S^2_* : S^2_* \to \widetilde{S}^2_*$ では γ' -組はなくなり，それ以外の f のシンギュラリティーはそのまま残る．$\{b_1, b_2\}$ ($\{\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2\}$) を結ぶ自明でプロパーな分岐曲線 (像) が A^3 ($\widetilde{A}^3$) の中にでき，F ($\widetilde{F}$) を境界とするプロパーな折返しディスク (像) が A^3 ($\widetilde{A}^3$) の中にできる．それ以外の f のシンギュラリティー (像) はそのまま A^3 ($\widetilde{A}^3$) に拡張される．γ-トリックが大域的で γ'-トリックが局所的となる理由は，γ'-トリックを行うと γ-対の分岐点が消え，さらに γ-対と折返し閉曲線 F が消えるからである．

問題 7.4 γ'-組 $\{\{b_1, b_2\}, F\}$ とその像 $\{\{\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2\}, F\}$ がそれぞれ A^3 と $\widetilde{A}^3$ の中に拡張された図を描け．

7.5.5 δ-トリック

δ-トリックも局所的な操作で，折返し曲線の一部 F の両側に正，負の分岐点

b^+, b^- があり，F の像 $\widetilde{F}$ にループが1つ生じ，そのループの中に b^+, b^- の像 $\widetilde{b}^+, \widetilde{b}^-$ がある．$\{b^+, b^-\}$ を分岐点の δ-対とよび，δ -トリックを行うと，δ-対とループが消える．$S^2_* = \partial A^3 - S^2, \widetilde{S}^2_* = \partial \widetilde{A}^3 - \widetilde{S}^2$ はともに2-球面である．A^3 ($\widetilde{A}^3$) の

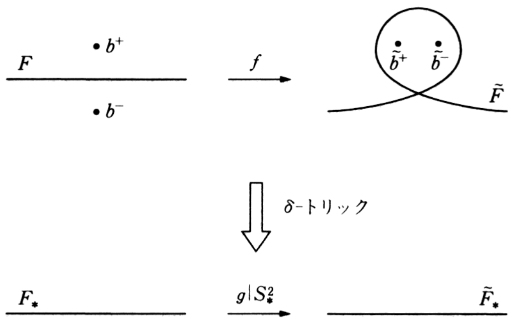


図 7.20　δ-トリック

中に折返し分岐点 (像) が生じる (巻頭の折返し分岐点 (像) 参照)．f をホモトピーで動かし，分岐点の δ-対と $\widetilde{F}$ のループを消すことができるが，これを S^2 ($\widetilde{S}^2$) の内部の同心球面上に実現すると f の拡張の良い写像 $g : A^3 \to \widetilde{A}^3$ となる．ホモトピーで δ-対とループが消える点に対応する点 (像) が折返し分岐点 (像) となる．

7.6　分岐点のあみだくじ表示

補題 7.6 ($n = 3$) の証明の最終段階では，折返し曲線はすべて消えて分岐点のみが残るので，それらが γ-対に分けられることを示さねばならない．分岐点像の状態を置換とあみだくじで表示し，γ -対となる分岐点をつぎつぎと決定する．

$\widetilde{Q}$ は $\widetilde{S}^2$ の経度，緯度がともに0から1の間にある正方形 $OABC(O = (0,0), A = (1,0), B = (1,1), C = (0,1))$ とする．良い写像 $f : S^2 \to \widetilde{S}^2$ の写像度は $m > 0$ で，シンギュラリティーは分岐点のみでその像はすべ $\widetilde{Q}$ の内部にあるものとする．分岐点像以外の $\widetilde{S}^2$ の点の幾何的写像度も m となり，折線 $BCOA$ の逆像の弧を $B_1C_1O_1A_1 \cdots, B_mC_mO_mA_m$ とすると，辺 BA の逆像は弧 $B_1A_{j_1}, \cdots, B_iA_{j_i}$,

$\cdots, B_m A_{j_m}$ となるから，分岐点像の集合に

$$\textbf{置換表示}\quad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & m \\ j_1 & \cdots & j_i & \cdots & j_m \end{pmatrix}$$

を対応させる．分岐点像は互いに経度，緯度が異なるものとする．分岐点像 $\widetilde{p}$ から辺 CO に垂線 $\widetilde{p}\,\widetilde{\widetilde{p}}$ を下すと（図 7.21），$f^{-1}(\widetilde{p}\,\widetilde{\widetilde{p}})$ の連結成分の中に分岐点 p を含む弧がただ1つある．その両端がそれぞれ弧 C_iO_i, C_jO_j $(0 \leq i < j \leq 1)$ に含まれるとき，$\widetilde{p}$ に**互換** $(i\ j)$ を対応させる．

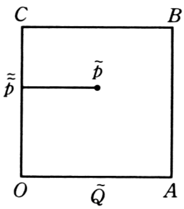


図 7.21

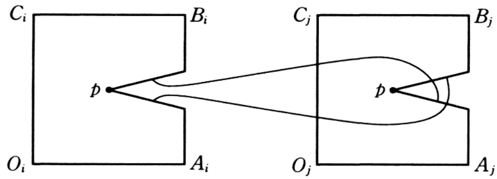


図 7.22　貼合せ

たとえば $\widetilde{Q}$ に分岐点像が $\widetilde{p}$ のみのときは，正方形を2つ $O_iA_iB_iC_i$ と $O_jA_jB_jC_j$ を用意し，p から辺 A_iB_i, A_jB_j に垂直に切れ目を入れて，その切り口を上下を逆に貼り合わせると (図 7.22)，$f^{-1}(\widetilde{Q})$ の1つの連結成分と同相な曲面が生じる．したがって，逆像 $f^{-1}(BA)$ は2つの弧 B_iA_j, B_jA_i をもつ．ゆえに分岐点像 $\widetilde{p}$ に互換 $(i\ j)$ を対応させると，B_iA_i, B_jA_j が B_iA_j, B_jA_i に変わるので，**あみだくじで表示**すると図 7.23 のようになる．

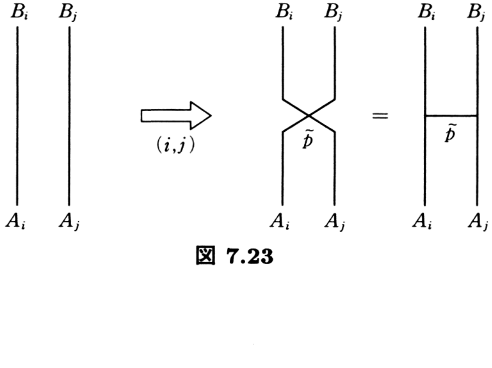


図 7.23

一般の場合も $\widetilde{Q}$ の m 個のコピー $Q_1, \cdots, Q_m$ をつくり，分岐点像に対する互換に応じて切貼りをして，$f^{-1}(Q)$ の各連結成分をつくることができる．さらに BA の m 個のコピーの縦線 $B_1A_1, \cdots, B_mA_m$ をつくり，分岐点像の緯線の位置に横線を入れると，$\widetilde{Q}$ の分岐点像のあみだくじ表示を得る．また分岐点像に対する互換を上から順に乗じると，分岐点像の集合に対する置換となる．

問題 7.5　$m=2$ で，$\widetilde{Q}$ の分岐点像が 2 つ $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2$ のみのときは，$f^{-1}(Q)$ はアニュラスとなることを示せ．

分岐点像 $\widetilde{p}$ に対する互換 $(i\ j)$ は $\widetilde{p}$ から辺 CO に垂線 $\widetilde{p}\,\widetilde{\widetilde{p}}$ を下して定めることから，$\widetilde{p}$ を水平に動かしても互換の表示は変わらない．しかし垂直に動かすと変わる．たとえば，分岐点像 $\widetilde{p}, \widetilde{q}$ がそれぞれ $(1\ 2), (2\ 3)$ と表示され，$\widetilde{p}$ が $\widetilde{q}$ より $\widetilde{Q}$

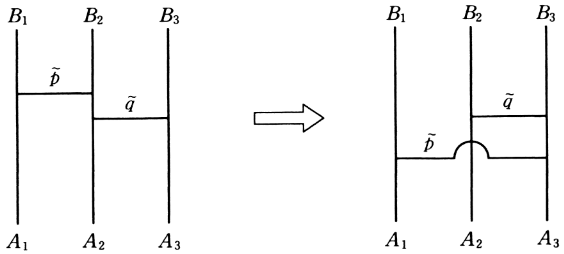


図 7.24

で右にあるとき，$\widetilde{p}, \widetilde{q}$ の上下の位置を交換するとあみだくじ表示は図 7.24 のようになり，$\widetilde{p}$ の互換表示 $(1\ 2)$ から $(1\ 3)$ に変わる．その理由は $\widetilde{p}$ が $\widetilde{q}$ より右にあるので，q の切れ目を通るとき p が正方形 Q_2 から Q_3 に移るからである (図 7.25)．しかし積は変わらない．

$$(1\ 2)(2\ 3) = (2\ 3)(1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ゆえに $\widetilde{Q}$ の中で分岐点像をホモトピーで動かすと，あみだくじ表示，分岐点像の互換表示は変わるが，$\widetilde{Q}$ の分岐点像全体に対する置換表示は変わらない．分岐点像 $\widetilde{p}$ をホモトピーで水平方向にもっとも右まで動かしておいてから，垂直方向に

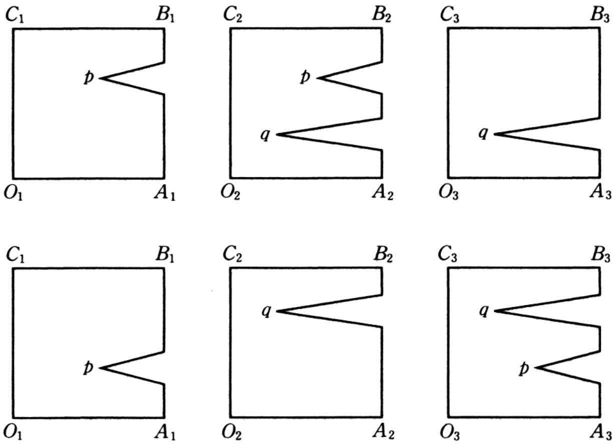


図 7.25　$\widetilde{p}$ が $\widetilde{q}$ の右にあるとき，$\widetilde{p},\widetilde{q}$ の上下を交換すると

動かしても，$\widetilde{p}$ 以外の分岐点像の互換表示は変わらず，もちろん $\widetilde{p}$ も含めて分岐点像に対する互換の積の置換表示も変わらない．

あみだくじ表示を用いて，分岐点の γ-対を求めよう．$\{p,q\}$ が分岐点の γ-対であるためには，p,q を結ぶ S^2 の弧 L_1,L_2 が存在し，$L_1\cup L_2$ は S^1 で p,q 以外の分岐点を含まず，また像 $\widetilde{p},\widetilde{q}$ を結ぶ弧 $\widetilde{L}$ が存在し，L_1,L_2 は $\widetilde{L}$ に同相写像されていればよい．$\widetilde{p},\widetilde{q}$ の互換表示が同じ $(i\ j)$ であれば，$\widetilde{p}$ と $\widetilde{q}$ から辺 CO への 2 つの垂線とその足を結ぶ線分のつくる折線を $\widetilde{L}$ とし，正方形 $\widetilde{Q}$ のコピー Q_i と Q_j 上で同様に L_i,L_j をつくると，$L_i\cup L_j$ は S^2 上の S^1 で，f により L_i と L_j は L に同相写像されるので，$\{p,q\}$ は γ-対となる．あみだくじ表示の中に図 7.26 のような横線と縦線を交互につないだ閉折線 C があるとき，C を**サイクル**とよぶ．たとえば縦線が 2 つ，横線が 2 つのサイクルは γ-対である．サイクルの縦線に他の分岐点像の横線がつながっている場合，ホモトピーによりサイクルからその横線を掃き出す．

【命題 7.7】　あみだくじ表示にサイクルがあれば，分岐点の γ -対が存在する．

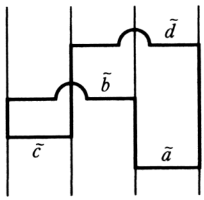


図 7.26　サイクル C

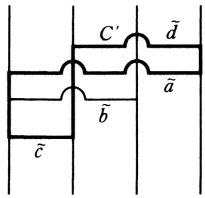


図 7.27

証明　サイクル C が存在したとする．C に含まれない横線 (分岐点線) はすべて C に交わらないように掃き出す．$\widetilde{a}$ は C に属する分岐点像の中でもっとも下にあるとする (図 7.26)．$\widetilde{b}$ は C の中で $\widetilde{a}$ の隣の分岐点像 ($\widetilde{b}$ と $\widetilde{d}$) のうちで下にあるとする．$\widetilde{a}$ は $\widetilde{b}$ より右にあるとしてよい．$\widetilde{a}$ を $\widetilde{b}$ の上まで上げると (図 7.27)，$\widetilde{b}$ を除いたサイクル C' が生じる．$\widetilde{b}$ を C' より下に下ろす．サイクル C' に対して同様の操作を続けると，最後に分岐点像が 2 つだけのサイクルを得る．もちろんこの 2 つの分岐点が γ-対である．■

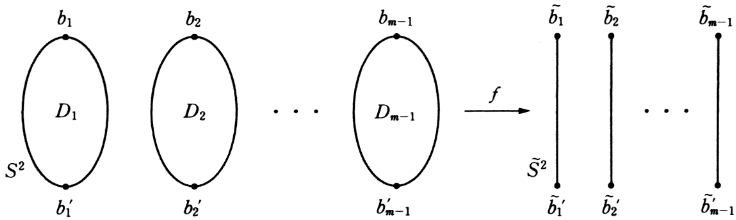


図 7.28　定理 7.8 の結論の図

良い写像 $f: S^2 \to \widetilde{S}^2$ のシンギュラリティーが分岐点のみのときは図 7.28 のように分岐点が γ-対に分けられることを定理 7.8 で示す．折返し曲線がないので分岐点は正のみまたは負のみである．したがって正の分岐点のみとする．m は f の写像度であり，$\widetilde{S}^2$ の分岐点像以外の点の幾何的写像度である．ディスク D_i の中に分岐点がはいることもあるが，f のホモトピーで D_i の外に掃き出して $D_1, \cdots, D_{m-1}$ は互い

に交わらないようにできる．$f|\mathrm{Int}(D_i)$ により $\mathrm{Int}(D_i)$ は $\widetilde{S}^2-\widetilde{b}_i\widetilde{b}'_i$ に同相写像され，$f|\partial D_1:\partial D_i\to\widetilde{b}_i\widetilde{b}'_i$ は b_i,b'_i を折返し点とする良い写像で，$f|S^2-D_1\cup\cdots\cup D_{m-1}$ は $S^2-D_1\cup\cdots\cup D_{m-1}$ から $\widetilde{S}^2-\widetilde{b}_1\widetilde{b}'_1\cup\cdots\cup\widetilde{b}_{m-1}\widetilde{b}'_{m-1}$ への同相写像である．

【定理 7.8】 良い写像 $f:S^2\to\widetilde{S}^2$ のシンギュラリティーが分岐点のみであり，写像度が $m\ (>0)$ であれば，分岐点は $m-1$ 個の γ -対に分けられる．

証明 分岐点はすべて正である．$\widetilde{S}^2$ の正方形 $\widetilde{Q}$ の内部にすべての分岐点像を入れておく．$\mathrm{cl}(\widetilde{S}^2-\widetilde{Q})$ はディスクであり，分岐点像を含まないから，$f^{-1}(\mathrm{cl}(\widetilde{S}^2-\widetilde{Q}))$ は m 個のディスクで，それぞれが $\mathrm{cl}\,(\widetilde{S}^2-\widetilde{Q})$ に同相写像される．したがって $\widetilde{Q}$ における分岐点像の置換表示は**恒等置換** $\begin{pmatrix}1\ 2\ \cdots\ m\\1\ 2\ \cdots\ m\end{pmatrix}$ となる．$f^{-1}(\widetilde{Q})$ は S^2 から m 個の開ディスク (ディスクからその境界を除いたもの) を除いた図形であるから，$f^{-1}(Q)$ は連結である．ゆえに $\widetilde{Q}$ の分岐点像のあみだくじ表示 G は連結なグラフである．

G はサイクルを含む．なぜなら，恒等置換であり，G が連結であるから，ある縦線の上端から発したあみだくじの 1 つの道は横線を何回か通って最後に同じ縦線に戻る．その道の最初の曲がり角を p，その縦線にはじめて戻った点を q とする．p から q までの途中の道と縦線の p と q を結ぶ線分を合するとサイクルとなる．

命題 7.7 より分岐点の γ-対 $\{b_1,b'_1\}$ があり，b_1,b'_1 を含む 1 つの閉曲線 $L(\subset S^2)$ が存在し，L は b_1,b'_1 以外の分岐点を含まず，b_1,b'_1 を両端とする L の 2 つの弧 L_1,L_2 は分岐点像 $\widetilde{b}_1,\widetilde{b}'_1$ を結ぶ弧 $\widetilde{L}$ に同相に写像されている．L を境界とする S^2 の 2 つのディスクを D_1,D_2 とする．$D_i\ (i=1,2)$ の境界の 2 つの弧 L_1,L_2 を貼り合わせて新しい 2-球面 $S_i^2\ (i=1,2)$ をつくる．$f|D_1,f|D_2$ と貼合せから $f:S^2\to\widetilde{S}^2$ を 2 つの良い写像 $f_1:S_1^2\to\widetilde{S}^2$ と $f_2:S_2^2\to\widetilde{S}^2$ に分解する．f_1,f_2 はシンギュラリティーが分岐点のみの良い写像で，写像度を m_1,m_2 とすると $m=m_1+m_2$ であり，$\widetilde{S}^2$ の分岐点像の中から $\widetilde{b}_1,\widetilde{b}'_1$ が消えている．

この証明を続けると，最後に m 個の 2-球面から $\widetilde{S}^2$ への同相写像を得る．写像度 m の f が写像度 1 の新しい写像に分解するのであるから，上述の分解は $m-1$ 回で終わる．分解に用いた切貼りを逆に貼った所を切り，切った所を貼り合わせて，

新しい m 個の同相写像から f を構成できるので，f は $m-1$ 個の分岐点の γ-対をもち，切貼りに用いた $m-1$ 個の閉曲線は交点をもたない．それらの閉曲線はホモトピーで図 7.28 のように修正するのは容易である．■

7.7　補題 7.6 (n=3) の証明

この節が 7 章の中心であり，単位球面 S^2 から単位球面 $\widetilde{S}^2$ への良い写像 $f: S^2 \to \widetilde{S}^2$ を単位球 B^3 から単位球 $\widetilde{B}^3$ への良い写像 $g: B^3 \to \widetilde{B}^3$ に拡張する．図 7.29 のように半径 $0<t\leq 1$ の $\widetilde{B}^3$ の同心球面を $\widetilde{S}^2_t$ とし，$\widetilde{S}^2=\widetilde{S}^2_1$ と $\widetilde{S}^2_t$ の間の

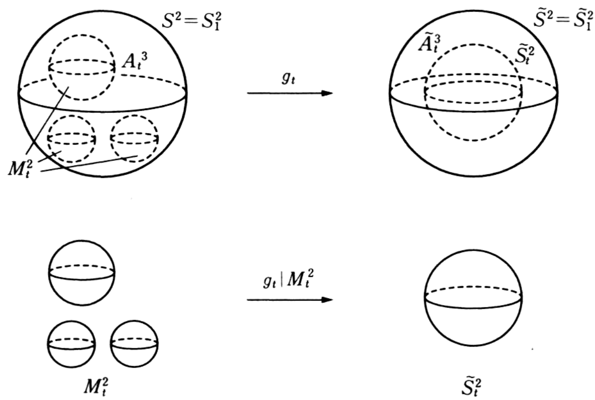


図 7.29

コンパクト 3-多様体を $\widetilde{A}^3_t$ とする．A^3_t は B^3 からその内部の互いに交わらない有限個の 3-球の内部を除いたコンパクト 3-多様体とする．$\partial(A^3_t)-S^2$ は有限個（図では 3 個）の 2-球面であるが，それを M^2_t と書く．補題の証明は $t=1$ から始めて t を小さくしつつ，$f: S^2 \to \widetilde{S}^2$ を良い写像 $g_t: A^3_t \to \widetilde{A}^3_t$ に拡張しながら，制限写像 $g_t|M^2_t: M^2_t \to \widetilde{S}^2_t$ のシンギュラリティーを単純にしていき，有限回のステップで証明を終わる．

$\widetilde{S}^2_t, 0<t\leq 1$，の 2 つの経線，2 つの緯線で囲まれた図 7.30 のような部分を**正**

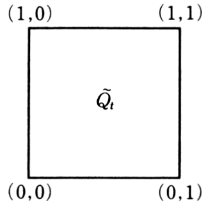


図 7.30　正方形 $\widetilde{Q}_t$

方形 $\widetilde{Q}_t$ とよぶ．**経度**，**緯度**をそれぞれ，x, y 座標とみなし，$\widetilde{Q}_t$ は $0 \leq x, y \leq 1$ を満たす点 (x, y) の集合とする．$f : S^2 \to \widetilde{S}^2$ のシンギュラリティーの像はすべて $\widetilde{Q}_1 (\subset \widetilde{S}^2)$ の内部に含まれていて，つぎのように一般の位置 (a)，(b) にしておく．

(a) 折返し曲線像は有限個の**極点** (**極大点**，**極小点**) をもち，極点以外では緯線と**横断的**に交わる．折返し曲線像の交叉点は有限個で 2 重点のみである．

(b) 折返し曲線像の極点，交叉点および分岐点像は緯度が互いに異なる．

(a)，(b) の条件を満たすように f を修正できる理由を簡単に述べる．S^2 における f のシンギュラリティー (互いに交わらない有限個の折返し閉曲線と有限個の分岐点) をそのままにして，ε-ホモトピー $\{f_s : S^2 \to \widetilde{S}^2, 0 \leq s \leq \ell\}$ $0 < \ell < 1$ をつくり，$f_l : S^2 \to \widetilde{S}^2$ を条件 (a)，(b) を満たすようにする．続いて半径 $1-s$ の同心球面 $S^2_{1-s}, \widetilde{S}^2_{1-s}$ 上に $f_s (0 \leq s \leq \ell)$ を実現すると，$f : S^2 \to \widetilde{S}^2$ は $A^3_{1-\ell} = \bigcup_{0 \leq s \leq l} S^2_{1-s}$ から $\widetilde{A}^3_{1-\ell} = \bigcup_{0 \leq s \leq \ell} \widetilde{S}^2_{1-s}$ への良い写像に拡張されたことになる．$\widetilde{S}^2_{1-\ell}$ におけるシンギュラリティーの像は $\widetilde{Q}_{1-\ell}$ の内部にはいっていて，条件 (a)，(b) を満たすとしてよいから，f は最初から (a)，(b) を満たすとする．

良い写像 $f : S^2 \to \widetilde{S}^2$ が良い写像 $g_t : A^3_t \to \widetilde{A}^3_t$ まで拡張され，$\widetilde{Q}_t$ の内部に折返し曲線像の連結成分 $\widetilde{F}$ があり，$\widetilde{F}$ は S^1 でその内部のシンギュラリティーは分岐点像のみのとき，g_t をさらに拡張する命題を示す．

【命題 7.9】　$\widetilde{F}$ は折返し曲線の 1 つの連結成分 F の像で極大点，極小点を 1 つずつもち，**折返しの向き**は内部に向かっている．$\widetilde{F}$ は $\widetilde{Q}_t$ の内部のディスク $\widetilde{D}$ の境界で，$\widetilde{D}$ の内部のシンギュラリティーの像は分岐点像のみとする（図 7.31）

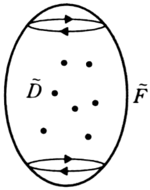


図 7.31

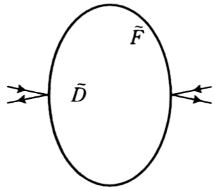


図 7.32

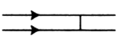
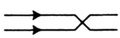
の引用．g_t を $g_t' : A_{t'}^3 \to \widetilde{A}_{t'}^3$ $(1 > t > t' > 0)$ まで拡張し，$g_t|M_{t'}$ がつぎのどれかを満たすようにできる．

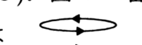
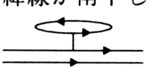
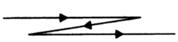
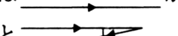
(i) $\widetilde{D}$ の内部に分岐点像がない場合は，$g_{t'}|M_{t'}$ で $\widetilde{F}$ が消え，$M_{t'}$ の 2-球面の個数は M_t より 1 つ減り，$\widetilde{A}_{t'}^3$ の内部に折返し曲面像の極小点が生じる．

(ii) $\widetilde{D}$ の内部の分岐点像が正 (負) のみのときは，$g_{t'}|M_{t'}$ で $\widetilde{F}$ が消える．

(iii) $\widetilde{D}$ の中に正と負の分岐点像が両方とも含まれるときは，$g_{t'}|M_{t'}$ で $\widetilde{F}$ の折返しの向きが図 7.32 のように外向きになり，$\widetilde{D}$ の内点の幾何的写像度は 4 だけ減り，$\widetilde{D}$ の外側の点の幾何的写像度は変わらない．

証明　(i) の証明は $(g_t|M_t^2)^{-1}(\widetilde{D})$ が M_t^2 の F を含む 2-球面であることを用いる．証明は問題とする．

(ii) 図の東向き，西向きの矢印は経線上のそれぞれ**正，負のシート**を表す． =  の短い縦線 (=交差する斜めの線) は 1 つの緯線上の 2 つの正のシートの向きの正の分岐点像を表す．この縦線はあみだくじ表示の横線に対応する．負の分岐点像はないとすると，関係のある負のシートは 1 枚のみで F に囲まれるディスクは $D \subset M_t^2$ であり，$f|D : D \to \widetilde{D}$ は同相写像である．

掃き出せる分岐点像をすべて $\widetilde{D}$ の**外に掃き出す** と，(i) 以外のときは図 7.33 のように 1 組の分岐点像の γ -対 $\{\widetilde{b}, \widetilde{b}'\}$ が残る (後で証明する)．図の一番北の緯線が南下して分岐点像 $\widetilde{b}$ を通過すると緯線上のシートの図は  から  =  に変わる．さらに $\widetilde{b}'$ を通過すると  = に変わる．すなわち $\widetilde{F}$ と緯線の交わりは南下するに従い，折返し点

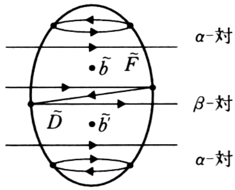


図 7.33

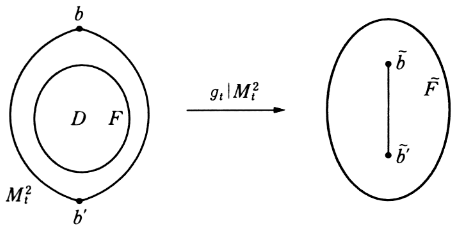


図 7.34

像の α -対から β -対に，さらに α -対へと変化したことになる．図 7.34 の右の図は図 7.33 と同じである．γ-対像 $\{\tilde{b}, \tilde{b}'\}$ を結ぶ線分 $\widetilde{bb'}$ は γ-対 $\{b, b'\}$ を通り F の外を 1 周する閉曲線の像となっている． $\{F, b, b'\}$ は γ'-組であり，γ'-トリックで消せる．A_t^3 ($\widetilde{A}_t^3$) の内部に折返し曲面 (像) の極小点と分岐曲線 (像) の極小点が生じる．

掃き出すとなぜ1組の γ -対だけが残るか，その理由を示す．$\widetilde{D}$ の中に残る分岐点像は何組かの γ -対であるが，2組以上残ると図 7.35 のように M_t^2 に把手ができてしまう．これは M_t^2 の連結部分が 2-球面であることに矛盾する．ゆえに分岐点の γ -対は1組のみである．

(iii) $\widetilde{D}$ の内部に正と負の分岐点像が両方ともある場合は，掃き出せる分岐点像はすべて $\widetilde{D}$ の外に掃き出すと，図 7.36 (a) のように正と負の分岐点像の γ -対が1組ずつ残るか (i) または (ii) となる．北にある正，負の分岐点像と南にある正，負の分岐点像を分ける緯線の上のシートは図 7.36 (a) のようになる．$\widetilde{F}$ を折返しの

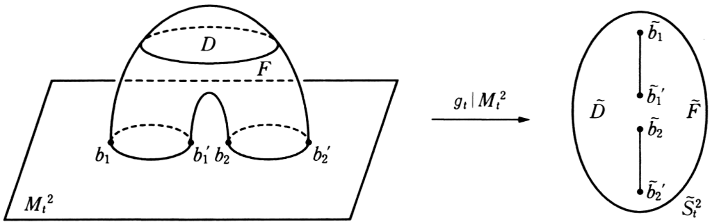


図 7.35

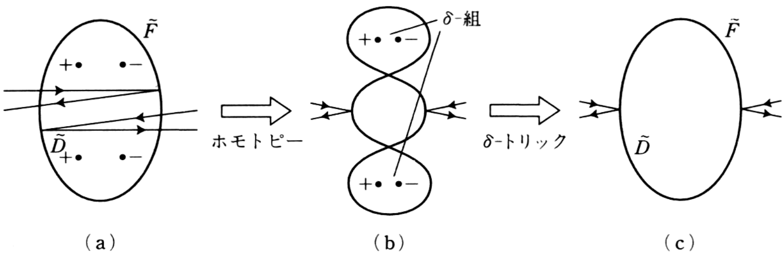


図 7.36

方向にホモトピーでひきずり出すと，その緯線の北と南に正と負の分岐点像と折返し曲線像のループからなる δ-組ができるので，δ-トリックを行うホモトピーにより，(a) の $\widetilde{F}$ は線対称変換で (c) の $\widetilde{F}$ となる．$\widetilde{D}$ の内部では正のシートが 2 つ，負のシートが 2 つ減るので，$\widetilde{D}$ の内部の点の幾何的写像度は 4 減り，$\widetilde{D}$ の外部では変わらない．この操作はすべてホモトピーなので，$g_{t'}$ に拡張され，A_t^3 (A_t^2) の内部に折返し分岐点 (像) が 2 つ生じる．■

補題 7.6 ($n=3$) の証明の荒筋をまず述べる．$t=1$ から緯度 t を低くしていき，緯線上に折返し曲線像の極点，交差点がのるたびにトリックなどの操作を行って，正方形 $\widetilde{Q}_t$ の t より北のシンギュラリティーの像が単純になるようにする．$\widetilde{Q}_t$ の t より南のシンギュラリティーはほとんど変えない．ただし，t より南に極小点を 1 つもつ折返し曲線像の弧が生じることがあるが，$\widetilde{Q}_t$ の外側の幾何的写像度 $\mu(t)$ が減るので，どうどうめぐりになる心配はない．折返し曲線像は命題 7.9 のよう

な内部に折返し曲線像をもたないものから順に消えていき，最後に正方形 $\widetilde{Q}_t$ の緯度 t より南に分岐点像のみが残り，それらはあみだくじ表示を用いて γ-対に分けられて，各対は分岐線 (像) の極小点で消え，$t=0$ で $f: S^2 \to \widetilde{S}^2$ は $g: B^3 \to \widetilde{B}^3$ に拡張される．

$g_t|M_t^2 \to \widetilde{S}_t^2$ がつぎの (a)，(b) を満たすとき**素直**であるという．

(a) $g_t|M_t^2$ の分岐点像はすべて緯度 t より南にある．

(b) $\widetilde{Q}_t$ の緯度 t 以上の部分を $\widetilde{R}_t$ と書く．$(g_t|M_t)^{-1}(\widetilde{R}_t)$ の連結成分はすべてディスクで，それらは**同相ディスク** $D_1, \cdots, D_\mu$ と**折返し**ディスク $D_{\mu+1}, \cdots, D_j$ に分かれ，同相ディスクは $\widetilde{R}_t$ に同相に写像される ($\mu(t)$ は $\mathrm{cl}\,(\widetilde{S}_t^2 - \widetilde{Q}_t)$ の各点における $g_t|M_t^2$ の幾何的写像度である)．折返しディスク $D_k, \mu+1 \leq k \leq j$, の直径 F_k が折返し線で，F_k 以外にシンギュラリティーをもたず，図 7.37 のように $\partial\widetilde{D}_k$ は緯度 t の緯線上に写像され，F_k で分割される 2 つの半円は同相に $\widetilde{R}_k$ のディスク $\widetilde{D}_k$ に写像され，F_k の像 $\widetilde{F}_k$ はただ 1 つの極大点をもつ．

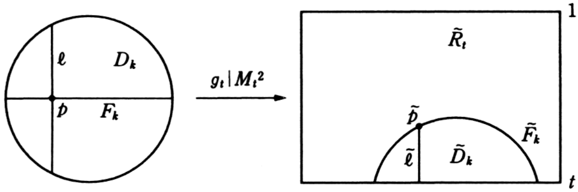


図 7.37

補題 7.6 ($n=3$) **の証明**　良い写像 $f: S^2 \to \widetilde{S}^2$ が良い写像 $g_t: A_t^3 \to \widetilde{A}_t^3$ に拡張され，$g_t|M_t^2: M_t^2 \to \widetilde{S}_t^2$ は素直になっているとする．$1 > t > t' > 0$ で，$\widetilde{p}$ は緯度 t と t' の間にある $g_t|M_t^2$ の折返し曲線像の極点または交差点で，緯度 t と t' の間にはほかに折返し曲線像の極点，交差点はないものとする．g_t を g_t' に拡張するとき $\widetilde{Q}_t$ の緯度 t' 以下のシンギュラリティーの像は $\widetilde{Q}_{t'}$ の緯度 t' 以下の部分に垂直に射影されるので，緯度 t' 以下ではシンギュラリティー像は変化しない．ただし，例外として緯度 t' の北の極大点を 1 つ含む折返し曲線像の弧を大きくホモトピーで動かし，緯度 t' の南の弧にする操作がある．このときは $\widetilde{Q}_f'$ の外部にある点の

幾何的写像度 $\mu(t')$ が下がるので，この操作を行う回数は $\mu(1)$ より少なく，証明がどうどうめぐりとなる心配はない．

(1.0)　$\widetilde{p}$ が $g_t : M_t^2 \to \widetilde{S}_t^2$ の折返し曲線像の極大点で，$\widetilde{p}$ における折返し曲線像の折返しの方向が南向きならば，ただちに $g_{t'} : A_{t'}^3 \to \widetilde{A}_{t'}^3$ まで拡張できる．図 7.38 のように $g_{t'}|M_{t'}^2$ は折返しディスクが 1 つ増えた素直な写像である．

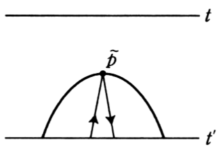


図 7.38

(1.1)　$\widetilde{p}$ が折返し曲線像の極大点で北向きの場合はいくつかの場合に分かれる．まず図 7.39 のように $\widetilde{p}$ で折返した 2 つのシートが両方とも R_t の同相ディスクにつながるときはすでに述べた例外の場合で，$\widetilde{Q}_t$ の緯度 t' 以下の部分に極小点 $\widetilde{q}$ をもつ弧 $\widetilde{F}_3'$ が生じるホモトピーが存在する．その際 $\widetilde{p}$ を極大点とする弧は大きく $\widetilde{Q}_t$ の外部を廻るので，t' より上部に折返しディスクの像 $\widetilde{F}_1', \widetilde{F}_2'$ が生じ，$\widetilde{Q}_t$ の外部の点の幾何的写像度が 2 だけ減る．

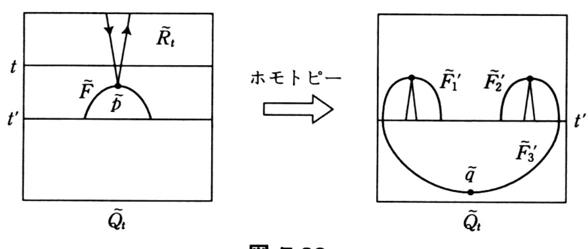


図 7.39

さらに緯度 t' 以下のシンギュラリティーの像は緯線 t' と弧 $\widetilde{F}_3'$ の囲む開ディスクの中にはいるとしてよい．以上のホモトピーを $\mathrm{cl}\,(\widetilde{A}_{t'}^3 - \widetilde{A}_t^3)$ に実現すると，$g_t : A_t^3 \to \widetilde{A}_t^3$ が $g_{t'} : A_{t'}^3 \to \widetilde{A}_{t'}^3$ に拡張される．M_t^2 と $M_{t'}^2$ の 2-球面の個数，シンギュラリティーは変わっていない．

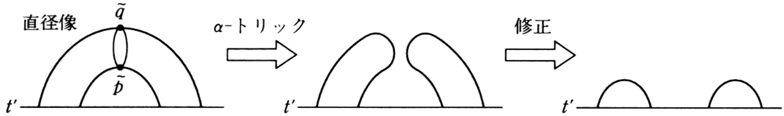


図 7.40

(1.2)　折返し曲線像の極大点 $\widetilde{p}$ が北向きで，$\widetilde{p}$ で折返した2つのシートが $g_t|M_t^2$ の1つの折返しディスク像の2つのシートとなる場合は，$\widetilde{p}$ を通る経線とそのディスクの直径像との交点を $\widetilde{q}$ とすると，経線と2つのシートの交わりは図 7.40 の左の図のようになり，これは M_t^2 上の閉曲線の像で，その閉曲線と $g_t|M_t^2$ のシンギュラリティーの交わりは折返し点の α -対 $\{p,q\}$ のみである．ここで α -トリックを行い，続いてホモトピーで修正する (図 7.40)．α -トリックはホモトピーでなく，M_t^2 の1つの2-球面が囲む3-球の中に $M_{t'}^2$ の2つの2-球面が生じ，M_t^2 の他の2-球面はそのまま $M_{t'}^2$ の2-球面となる．このようにして g_t は $g_{t'}$ に拡張され，$g_{t'}|M_{t'}^2$ は折返しディスク像が1つ増えた素直な写像となる．A_t^3 $(\widetilde{A}_t^3)$ に折返し曲面 (像) の鞍部が生じる．

(1.3) 折返し曲線像の極大点 $\widetilde{p}$ が北向きで，$\widetilde{p}$ で折返した経線上のシートの1つが折返しディスクの直径像を $\widetilde{q}$ でぶつかり $\{\widetilde{p},\widetilde{q}\}$ が折返し点の β-対となる場合である (図 7.41)．ここで β-トリックを行い，生じた2つの分岐点像を緯度 t' より 南

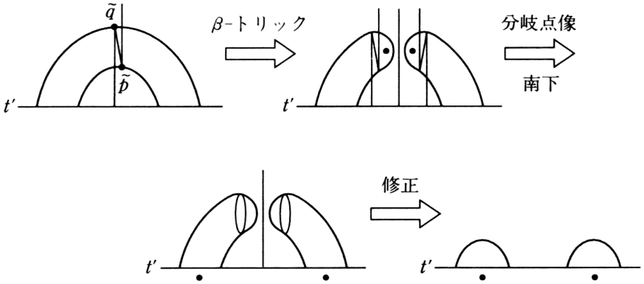


図 7.41

に下し，続いて，折返し曲線像を素直な形にする．これらの操作はすべてホモトピーなので，g_t を $g_{t'}: A^3_{t'} \to \widetilde{A}^3_{t'}$ に拡張できる．$g_{t'}|M^2_{t'}$ に折返しディスクが 1 つ増え，$A^3_{t'}$ ($\widetilde{A}^3_{t'}$) に折返し曲面 (像) の鞍部と分岐曲線 (像) の極大点が生じる．

(2.0) $\widetilde{p}$ が折返し曲線像の極小点で，折返しは南向きとする．仮定により緯度 t と t' の間には $\widetilde{p}$ 以外に折返し曲線像の極点，交差点は存在しない．$g_t|M^2_t$ の 2 つの折返しディスク $D_k, D_{k'}$ ($\mu(t)+1 \leq k, k' \leq j$) の直径像 $\widetilde{F}_k, \widetilde{F}_{k'}$ が $\widetilde{p}$ でつながることになる．つながった折返し曲線像はホモトピーで素直な形に修正できる (図 7.42)．g_t は $g_{t'}: A^3_{t'} \to \widetilde{A}^3_{t'}$ に拡張され，素直な写像 $g_{t'}|M^2_{t'}$ では折返しディスクが 1 つ減る．



図 7.42

(2.1) $\widetilde{p}$ が折返し曲線像の極小点で，折返しは北向きとする．$\widetilde{p}$ を通る折返し曲線像が $g_t|M^2_t$ の折返しディスクの直径像 $\widetilde{F}_k$ とつながって，折返し閉曲線像 $\widetilde{F}$ となっているものとする（図 7.43)．$\widetilde{F}$ の囲むディスクを $\widetilde{D}$ とし，$\widetilde{F}$ に命題 7.9 を適用する．命題 7.9 の (i) の場合は $(g_t|M^2_t)^{-1}(\widetilde{D})$ の 2-球面 ($\subset M^2_t$) が F で折り返され $\widetilde{D}$ に写像される．$g_{t'}: A^3_{t'} \to \widetilde{A}^3_{t'}$ に g_t が拡張できて，$g_{t'}|M^2_{t'}$ では F とこの 2-球面がともに消える．この操作は 1 次元高い α -トリックと見なせる．(ii) の場合は γ' -トリックで $\widetilde{F}$ が消えるホモトピーがあるので，やはり g_t を $g_{t'}: A^3_{t'} \to$

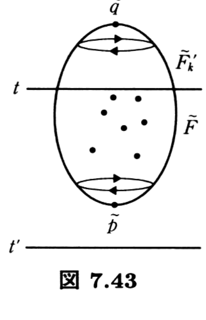


図 7.43

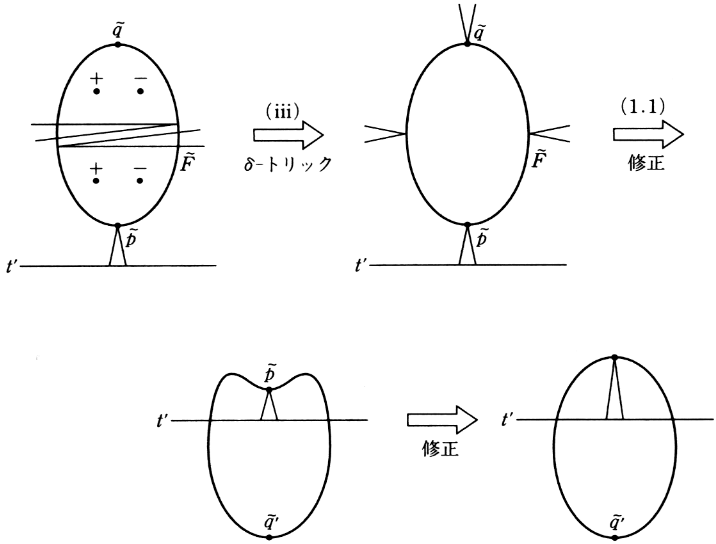


図 7.44

$\widetilde{A}^3_{t'}$ に拡張できる．(iii) の場合は δ -トリック (図 7.36) を用いて $\widetilde{F}$ を極大点 $\widetilde{q}$ と極小点 $\widetilde{p}$ を結ぶ直線に線対称に動かすと，$\widetilde{F}$ は外向きの折返し閉曲線像となる．極大点 $\widetilde{q}$ は北向きの折返し点となるので (1.1), (1.2), (1.3) の手法が適用できる．(1.1) の場合は図 7.44 のようにふたたび緯度 t' の北に折返しディスク像が生じ，緯度 t' の南に極小点 $\widetilde{q}'$ を 1 つもつ折返し曲線像の弧が生じる．これらの操作はすべてホモトピーなので，拡張 $g_{t'}: A^3_{t'} \to \widetilde{A}^3_{t'}$ をつくることができて，素直な写像 $g_{t'}|M^2_{t'}$ では折返しディスクの個数は増減なく，緯度 t' の南に極小点 $\widetilde{q}'$ をもつ折返し曲線の弧が生じ，$\widetilde{Q}_{t'}$ の外側の各点の幾何的写像度は 2 だけ減る．(1.2) の場合は存在しない (図 7.45)．なぜなら，$\widetilde{q}$ を通る経線の逆像に生じる S^1 が M^2_t の 1 つの 2- 球面に含まれるが，(1.2) の場合は，その S^1 が 2-球面を分離しないのでありえない．(1.3) の場合は図 7.46 のように β -トリックを用い，分岐点像を南下させ，折返し閉曲線像を素直にする．これらの操作はすべてホモトピーであるので，拡張 $g_{t'}|A^3_{t'} \to \widetilde{A}^3_{t'}$ をつくることができる．素直な写像 $g_{t'}|M^2_{t'}$ では折返しディス

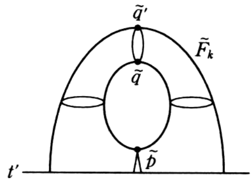


図 **7.45**　(1.2)

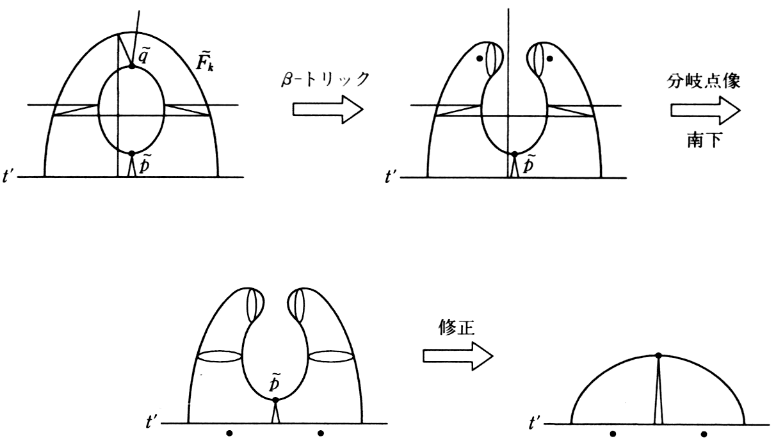


図 **7.46**　(1.3)

クが 1 つ増加している．

(2.2)　$\widetilde{p}$ が折返し曲線像の極小点で，折返しの向きは北向きであり，$\widetilde{p}$ を通る折返し曲線像が 2 つの折返しディスクの直径像 $\widetilde{F}_k, \widetilde{F}_{k'}(\mu(t)+1 \leq k, k' \leq j)$ につながっているとする．$\widetilde{p}$ の北に $\widetilde{F}_k$ と $\widetilde{F}_{k'}$ はただ 1 つの交点 $\widetilde{q}$ をもち，$\widetilde{p}$ を通るループが図 7.47 のようにできる．掃き出せる分岐点像をループの外に掃き出し，緯度 t' より下ろすと，ループの中には正と負の分岐点像の δ-対が残り，ループと合わせると δ-組となるので，δ-トリックを行うと δ-組は消えて折返しディスク像が 1 つできる．これらの操作はホモトピーなので，拡張 $g_{t'} : A^3_{t'} \to \widetilde{A}^3_{t'}$ をつくることができて，折返しディスクが 1 つ減る．$A^3_{t'}$ ($\widetilde{A}^3_{t'}$) に折返し分岐点 (像) が生じる．

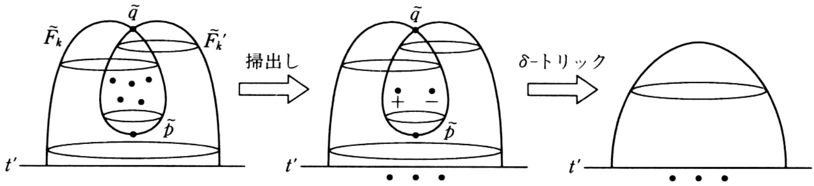


図 7.47

(3.0)　$g_t : A_t^3 \to \widetilde{A}_t^3$ まで拡張できて，緯度 t, t' $(1 > t > t' > 0)$ の間には折返し曲線像の交叉点 $\widetilde{p}$ があり，$\widetilde{p}$ 以外には折返し曲線像の極点，交叉点はないものとする．図 7.48 の (a)，(b) の場合は，$\widetilde{p}$ の北の分岐点像は緯度 t' の南に掃き出せるので，拡張 $g_{t'} : A_{t'}^3 \to \widetilde{A}_{t'}^3$ はただちにつくることができる．したがって (c) の場合のみを検討すれば良い．

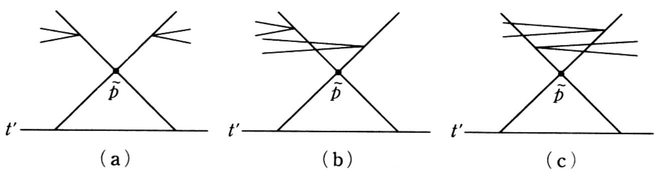


図 7.48

(3.1)　図 7.48 (c) の $\widetilde{p}$ で交叉する 2 つの折返し曲線像が 1 つの折返しディスクの直径像とつながってループとなるときは (図 7.49)，掃き出せる分岐点像を緯度

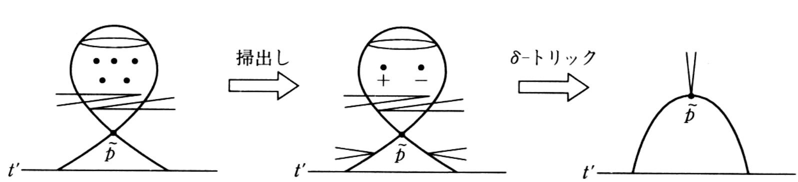


図 7.49

t' の南に下げるとループの中に分岐点の δ-対の像が残るから，δ-トリックを行う．$\widetilde{p}$ は折返し曲線像の極大点となる．続いて (1.1), (1.2), (1.3) を実行すると，拡張 $g_{t'}: A^3_{t'} \to \widetilde{A}^3_{t'}$ を得る．(1.1) の場合は緯度 t' の南に折返し曲線像の極小点が 1 つ増えるが，$\mu(t') = \mu(t) - 2$ である．

(3.2)　図 7.48 (c) の $\widetilde{p}$ で交わる 2 つの折返し曲線像が折返しディスクの直径像 $\widetilde{F}_k, \widetilde{F}_{k'} (\mu+1 \leq k, k' \leq j)$ に含まれるときは図 7.50 のように $\widetilde{p}$ の北に $\widetilde{F}_k$ と $\widetilde{F}_{k'}$ の交差点 $\widetilde{q}$ が存在し，$\widetilde{p}$ と $\widetilde{q}$ を結ぶ 2 つの弧の囲むディスクを $\widetilde{D}$ とする．$\widetilde{D}$ の中

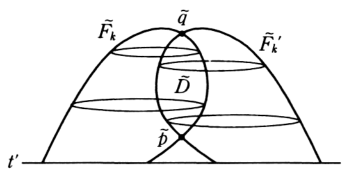


図 7.50

の分岐点像で掃き出せるものを掃き出すと，M^2_t の連結成分はすべて 2-球面であるから，$\widetilde{D}$ の中に分岐点像がないか (図 7.50)，1 組の分岐点像の α-対が残る (図 7.51)．どちらの場合も $g'_t: A^3_{t'} \to \widetilde{A}^3_{t'}$ に拡張でき折返しディスク像の個数は変化しない．図 7.50 の場合は明らかなので，図 7.51 の場合を説明する．図 7.51 の γ-対の上にある分岐点像の下に折返し点像の β-対があるからそこで，β-トリックを行うと，$\widetilde{q}$ の下と，$\widetilde{p}$ の上に 1 組ずつ δ-組ができる．そこで両者を δ-トリックで消すと $\{\widetilde{p}, \widetilde{q}\}$ が折返し点の α-対像となるので，α-トリックを行うと t' の北に 2 つの折返しディスク像が生じる．したがって g_t は $g_{t'}: A^3_t \to \widetilde{A}^3_{t'}$ に拡張できるが，α-トリックを 1 回行ったため $M^2_{t'}$ の 2-球面は 1 つ増えている．

(4)　この段階で折返し曲線がすべて消せることを示す．そのために拡張が $g_t: A^3_t \to \widetilde{A}^3_t$ まで進んだときに $\widetilde{S}^2_t$ の緯度 t より南にある折返し曲線像の極点，交差点の合計数を $\nu(t)$ とし，$\mu(t)+\nu(t)$ が単調に減少していることを確かめねばならない．常に $\mu(t) \geq \mu(t'), \nu(t) \geq v(t')$ は成立している．$\nu(t) = \nu(t')$ となるのは緯度 t' より南に折返し曲線像の極小点 $\widetilde{q}$ が生じる場合のみで，t より北の極点または交点である $\widetilde{p}$ が消えるので $\nu(t) = \nu(t')$ が成立する．それ以外の場合は $\widetilde{p}$ が消

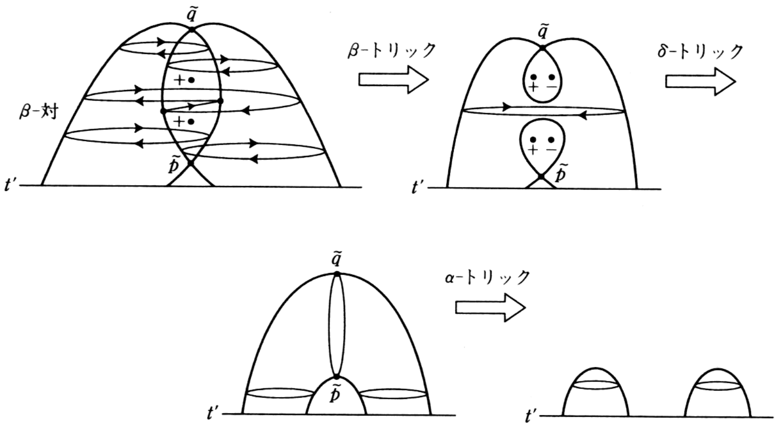


図 7.51

え，t' より南は変化しないので $\nu(t) > \nu(t')$ である．$\tilde{q}$ が生じるときは (1.1), (2.1), (3.1) のみであるが，どの場合も $\mu(t') = \mu(t) - 2$ であるから，$\mu(t) + \nu(t)$ は単調に減少する．$\mu(1)$ ($\widetilde{S}^2 - \widetilde{Q}_1$ の各点における f の幾何的写像度) と $\nu(1)$ (f の折返し曲線像の極点と交差点の総個数) の和 $\mu(1) + \nu(1)$ 以下の回数の操作により，折返し曲線は消える．折返し閉曲線が実際に消える操作は (2.1) で，命題 7.9 の (i), (ii) を用いる．最終段階では折返し閉曲線がただ1つ残り，命題 7.9 の (iii) を繰り返して使い，最後に (i) または (ii) によりその折返し閉曲線を消して分岐点のみが残る．

(5)　良い写像 $f : S^2 \to \widetilde{S}^2$ が良い写像 $g_t : A_t^3 \to \widetilde{A}_t^3$ $(1 > t > 0)$ に拡張され，$g_t|M_t^2 : M_t^2 \to \widetilde{S}_t^2$ のシンギュラリティーは分岐点のみとする．M_t^2 は有限個の 2-球面であるから，結局良い写像 $f : S^2 \to \widetilde{S}^2$ のシンギュラリティーが分岐点のみであるとき，良い写像 $g : B^3 \to \widetilde{B}^3$ に拡張する問題に帰する．定理 7.8 により分岐点はいくつかの γ-対となり，γ-トリックを用いると B^3 の中に分岐曲線の極小点で γ-対が消え，定理 7.6 の証明は終了する．■

7.8　良い写像とハンドル分解

M, N が閉 n-多様体 $(n = 1, 2, 3), f : M \to N$ が良い写像であるときに，N のハンドル分解から M のハンドル分解を構成するのが目的である．第 5 章「ハンドル分解」の復習または練習として読んでもらいたい．**i-ハンドル**を $D^i \times D^{n-i}$ と書く $(i = 0, 1, \cdots, n)$．D^i, D^{n-i} はそれぞれ i-球，$(n-i)$-球で，その直積の i-ハンドルは n 次元球である．$\partial D^i \times D^{n-i}$ を**接着面**とよぶ．0-ハンドル $D^0 \times D^{n-0}$ の接着面は存在しない．0-ハンドルから始めてすでにつくられた多様体の境界につぎつぎと i-ハンドルをその接着面で貼りつけて多様体を完成する．D^i, D^{n-i} の**重心**を o とし，(o, o) を i-ハンドルの**重心** (中心) とよぶ．$D^i \times \{o\}$ を i-ハンドル $D^i \times D^{n-i}$ の**コア**とよぶ．コアはハンドルのまさに主役であって，コアが i-球であるから，$D^i \times D^{n-i}$ を i 次元ハンドルとよぶのである．

$n = 3$ の場合をおもに扱う．$n = 1, 2$ の場合は $n = 3$ の場合より簡単である．それは n に関係なく i-ハンドルのコアは i-球であるからである．今後 $n = 3$ とする．

【命題 7.10】 N の 0-ハンドルから M の 0-ハンドルが生じる．

証明　N の 0-ハンドル $D^0 \times D^{3-0}$ は十分小さくて，f のシンギュラリティーの像と交わらないとする．$f^{-1}(D^0 \times D^{3-0})$ は $D^0 \times D^{3-0}$ の重心 (o, o) における幾何的写像度 ($f^{-1}((o, o))$ の点の数) 個の 3-球となり，それらの 3-球は互い交わらず，f により同相に $D^0 \times D^{3-0}$ に写像されるので，それぞれを M の 0 -ハンドルとしてよい．■

命題 7.10 の証明で肝心なことは 0 -ハンドルは十分小さいことであり，重心 (o,o) は 0-ハンドルのコア $D^0 \times \{o\} = \{o\} \times \{o\}$ と一致することである．すなわち 0-ハンドルをコアを中心にして相似に縮小して f のシンギュラリティーに交わらないようにした，これは一般の位置の 1 つの手法である．この手法を拡張して，f の折返し曲面像 $\widetilde{F}$，分岐曲線像 $\widetilde{B}$，折返し分岐点像 $\widetilde{FB}$ は N のハンドルのコアと**横断的**に交わり，さらにシンギュラリティー像 $\widetilde{F}, \widetilde{B}, \widetilde{FB}$ と i -ハンドルとの交わりは**直積状**になっているものとする．すなわち，1-ハンドルは十分細く，2-ハンドルは

十分薄くして,

$$\begin{aligned} D^i \times D^{3-i} \cap \widetilde{F} &= (D^i \times \{o\} \cap \widetilde{F}) \times D^{3-i} \\ D^i \times D^{3-i} \cap \widetilde{B} &= (D^i \times \{o\} \cap \widetilde{B}) \times D^{3-i} \\ D^i \times D^{3-i} \cap \widetilde{FB} &= (D^i \times \{o\} \cap \widetilde{FB}) \times D^{3-i} \end{aligned}$$

を満たすものとする.

N のハンドルから生じた M のハンドルをつぎつぎと接着面で接着して M のハンドル分解をつくる. i-球 D^i を単位球とし, D^i の点 p までの重心 o からの距離を $t = h(p)$ と書き, $h: D^i \to [0,1]$ を高さ関数（height function）とみなす. D^i の高さが t 以上の部分を $D^i_t(S^{i-1} \times [t,1], 0 < t < 1$, と同相) と書く.

【命題 7.11】 N の 1-ハンドルから M の 0,1-ハンドルが生じる.

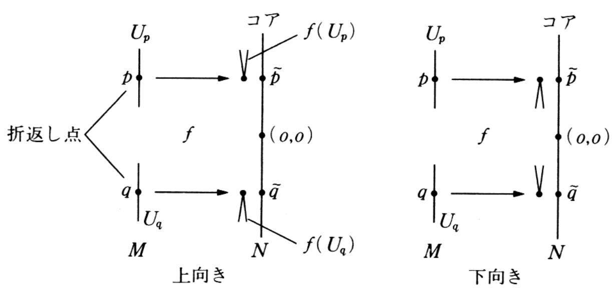


図 7.52

証明　N の 1-ハンドルを $D^1 \times D^{3-1}$ とする. f のシンギュラリティー像とコア $D^i \times \{o\}$ は横断的に交わるから, コアと交わるシンギュラリティー像は折返し極面像 $\widetilde{F}$ だけで, コアの境界 $\partial(D^1 \times \{o\}) = \partial D^1 \times \{o\}$ と重心 $\{o\} \times \{o\} = (o,o)$ は $\widetilde{F}$ 上にないとしてよい. t の高低を上下とし, コア上の折返し点像 $\widetilde{p}$ の折返しの向きを, 図 7.52 のように定める. U_p を折返し点 p ($\widetilde{p} = f(p)$) の $f^{-1}(D^1 \times \{o\})$ における十分小さい正則近傍とする. $f(U_p - \{p\})$ の各点の高さが, $\widetilde{p}$ の高さより

高 (低) いとき，$\widetilde{p}$ は上 (下) 向きの折返し点像という．すでに M の中のハンドル分解ができた部分 M^* に $D_t^1 \times D^{3-1}$ からできるハンドルを加えた 3-多様体を M_t^* と書く．コアの高さ t に折返し点像 $\widetilde{p}$ があり，高さ $t+\varepsilon$ と $t-\varepsilon$ の間にはその他の折返し点像はないときに $M_{t+\varepsilon}^*$ にどのようなハンドルを加えると $M_{t-\varepsilon}^*$ となるかを考える．

$\widetilde{p}$ が下向きの場合は $f(U_p) \times D^{3-1}$ は円柱で $D_{t+\varepsilon}^1 \times D^{3-1}$ とは接触していない．$M_{t-\varepsilon}^*$ は $M_{t+\varepsilon}^*$ に $f^{-1}(\mathrm{cl}(M_{t-\varepsilon}^* - M_{t+\varepsilon}^*))$ を加えた 3-多様体であるが，p の近傍以外では $M_{t+\varepsilon}^*$ を同相に拡大したものが $M_{t-\varepsilon}^*$ となり，p の近傍では $M_{t+\varepsilon}^*$ に $f(U_p) \times D^{3-1}$ と同相な 0-ハンドルを加えて $M_{t-\varepsilon}^*$ のハンドル分解を得る．

$\widetilde{p}$ が上向きの場合は，$f(U_p) \times D^{3-1}$ は円柱で $D_t^1 \times D^{3-1}$ と 1 つの底ディスクで接着している．写像 $f|U_p \times D^{3-1} : U_p \times D^{3-1} \to f(U_p) \times D^{3-1}$ において，$U_p \times D^{3-1} \cap F = p \times D^{3-1}$ は $U_p \times D^{3-1}$ の折返しディスクであり，$\widetilde{p} \times D^{3-1}$ は折返しディスク像となり，さらに $U_p \times D^{3-1}$ は $M_{t+\varepsilon}^*$ と 2 つのディスク $\partial U_p \times D^{3-1}$ で接着するから，$M_{t+\varepsilon}^*$ に 1-ハンドル $U_p \times D^{3-1}$ が加わり，$M_{t-\varepsilon}^*$ までハンドル分解が進んだことになる．

最後に高さが 0 になると，重心 (o, o) の幾何的写像度の個数の 1-ハンドルが加わる． ■

【命題 7.12】 N の 2-ハンドルから，M の 0,1,2-ハンドルが生じる．

証明　N の 2-ハンドルを $D^2 \times D^{3-2}$ とする．コア $D^2 \times \{o\}$ とシンギュラリティーの像の交わりは横断的で，ハンドルとシンギュラリティー像の交わりは直積状，すなわち $D^2 \times D^{3-2} \cap \widetilde{F} = (D^2 \times \{o\} \cap \widetilde{F}) \times D^{3-2}, D^2 \times D^{3-2} \cap \widetilde{B} = (D^2 \times \{o\} \cap \widetilde{B}) \times D^{3-2}$，かつ $D^2 \times D^{3-2}$ は折返し分岐点像を含まない．また，$D^2 \times D^{3-2}$ の重心 $(o, o) = \{o\} \times \{o\}$ はシンギュラリティー像に含まれない．コア $D^2 \times \{o\}$ と折返し曲面像の交わりの曲線上の高さ t に関する極大点，極小点，分岐曲線像との交点，重心 (o, o) で 0,1,2-ハンドルが生じる．命題 7.11 の証明と同じく M のハンドル分解が $M_{t+\varepsilon}^*$ まで進んだとする．

コアの高さ t に折返し曲線像 $\widetilde{F}'$ (折返し曲面像とコアの交わり) の極大点 $\widetilde{p}$ があり，$\widetilde{p}$ の折返しは下向きとする (図 7.53)．$f^{-1}(D^2 \times \{o\})$ における折返し点

$p(f(p)=\widetilde{p})$ の十分小さなディスク近傍 U_p を選び，∂U_p は f により $t-\varepsilon$ の高さの弧に2重に写像されているとしてよい．$U_p \times D^{3-2}$ は接着面をもたない3-球であるので $M^*_{t+\varepsilon}$ に1つの0-ハンドルを加えて $< M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解を得る．

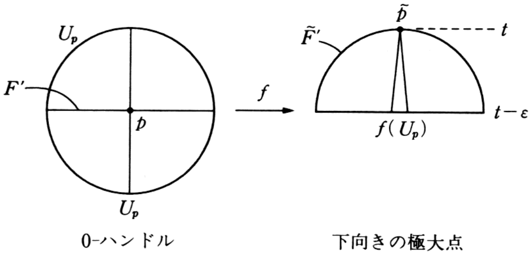


図 7.53

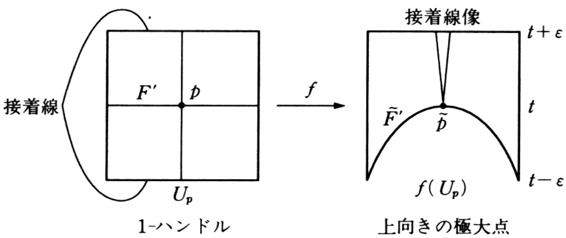


図 7.54

コアの高さ t に折返し曲線像 $\widetilde{F}'$ の極大点 $\widetilde{p}$ があり，$\widetilde{p}$ の折返しは上向きとする (図 7.54)．$f^{-1}(D^2 \times \{o\})$ における折返し点 p $(f(p)=\widetilde{p})$ の十分小さな正方形近傍 U_p を選び，折返し F' をはさむ正方形の対辺が接着線となるようにする．$U_p \times D^{3-2}$ は2つのディスクで $M^*_{t+\varepsilon}$ に接着していて $M^*_{t+\varepsilon} \cup U_p \times D^{3-2}$ は $M^*_{t-\varepsilon}$ と同相である．ゆえに $M^*_{t+\varepsilon}$ に1-ハンドルを加えて，$M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解を得る．

コアの高さ t に折返し曲線像 $\widetilde{F}'$ (折返し曲面像とコアの交わり) の極小点 $\widetilde{p}$ があり，$\widetilde{p}$ の折返しが下向きとする (図 7.55)．$f^{-1}(D^2 \times \{0\})$ における折返し点

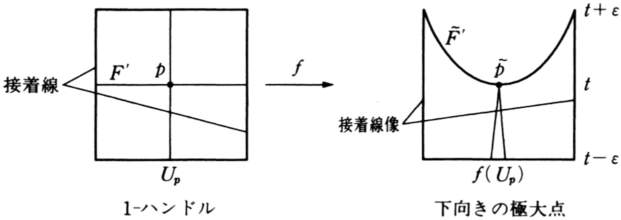


図 7.55

p $(f(p)=\widetilde{p})$ の十分小さな正方形近傍 U_p をとり，折返し線 F' $(f(F')=\widetilde{F}')$ は U_p の1組の対辺に垂直に交わるようにする．$U_p\times D^{3-2}$ は2つのディスク (1組の対辺 $\times D^{3-2}$) を接着面とする3-球なので，この1-ハンドルを加えて $M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解を得るとしてよい．なぜなら，$\mathrm{cl}(M^*_{t-\varepsilon}-U_p\times D^{3-2}$) は $M^*_{t+\varepsilon}$ は同相で，cl $(M^*_{t-\varepsilon}-U_p\times D^{3-2})$ に $U_p\times D^{3-2}$ を2つのディスクで接着して $M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解を得るからである．

コアの高さ t に折返し曲線像 $\widetilde{F}'$ の極小点 $\widetilde{p}$ があり，$\widetilde{p}$ の折返しが上向きとする (図 7.56)．$f^{-1}(D^2\times\{o\})$ における折返し点 p $(f(p)=\widetilde{p})$ の十分小さなディスク

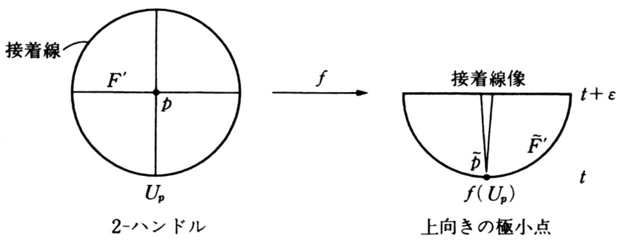


図 7.56

近傍 U_p をとり，∂U_p は f により高さ $t+\varepsilon$ にある線に2重に写像されているものとする．$U_p\times D^{3-2}$ は $M^*_{t+\varepsilon}$ にアニュラス $\partial U_p\times D^{3-2}$ で接着している．$M^*_{t+\varepsilon}$ に2-ハンドル $U_p\times D^{3-2}$ を加えると $M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解を得る．

コアの高さ t に分岐点像 $\widetilde{b}$ (分岐曲線像とコアの交点) があるとする (図 7.57).

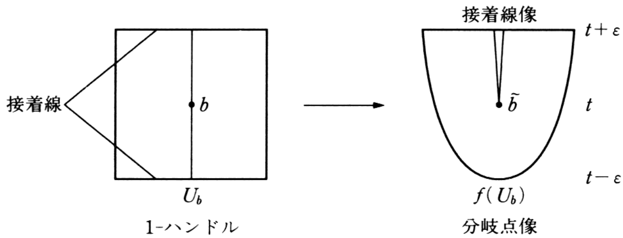


図 7.57

$f^{-1}(D^2 \times \{o\})$ に分岐点 b $(f(b) = \widetilde{b})$ の正方形近傍 U_b をとり，U_b の 1 組の対辺がコアの高さ $t+\varepsilon$ の線に同相写像されるようにする．$U_b \times D^{3-2}$ は $M^*_{t+\varepsilon}$ に 2 つのディスクで接触している．ゆえに $M^*_{t+\varepsilon}$ に 1-ハンドル $U_b \times D^{3-2}$ を加えたハンドル分解が得られるが，$M^*_{t-\varepsilon}$ は $M^*_{t+\varepsilon} \cup U_b \times D^{3-2}$ と同相なので，$M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解は $M^*_{t+\varepsilon}$ のハンドル分解に 1-ハンドルを加えたものである．

t が 0 に達すると，$M^*_{0-\varepsilon}$ に重心 (o,o) の幾何的写像度の個数の 2-ハンドルが加わる．■

本節の主定理 7.14 の証明の中心部分がつぎの命題 7.13 である．この命題では N の 3-ハンドルから M の 0,1,2,3-ハンドルが生じることを示している．N の 3-ハンドル $D^3 \times D^{3-3}$ はコア $D^3 \times \{o\}$ と同じものとみてよい．確かめなければならない場合は相当多くなる．命題 7.10，7.11，7.12 の証明ではコアとシンギュラリティー像の交わりを土台にして論じたが，命題 7.13 の証明では直接 3-ハンドル $D^3 \times D^{3-3}$ とシンギュラリティー像の交わりを論ずる．

【命題 7.13】　N の 3-ハンドルから，M の 0,1,2,3-ハンドルが生じる．

証明　N の 3-ハンドル $D^3 \times D^{3-3}$ の接着面は 2-球面 $\partial D^3 \times D^{3-3}$ であるから，すでにハンドル分解のできた M の部分多様体 M^* の境界の 1 つの連結成分の 2-球面に $D^3 \times D^{3-3}$ を接着することになる．高さ関数 $h : D^3 \to [0,1]$ に関して，f の折返し曲面像は有限個の極大点，鞍部，極小点をもち，分岐曲線像は有限個の極大点，極小点をもち，それらに折返し分岐点を加えた集合を X とする．X の各

点は互いに高さが異なり，1 と 0 の高さに X の点はないものとする．したがって，3-ハンドルの境界と中心には X の点はない．$D_t^3 = h^{-1}([t,1])$ と書くことは今までと同じである．

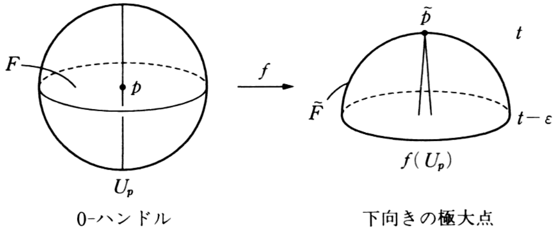


図 7.58

高さ t に折返し曲面 $\widetilde{F}$ の極大点 $\widetilde{p}$ があって，高さ $t-\varepsilon$ と $t+\varepsilon$ の間に $\widetilde{p}$ 以外の X の点はなく，折返しの向きが下向きのときは，折返し分岐点 p $(f(p)=\widetilde{p})$ の十分小さな球近傍 U_p をとり，∂U_p は高さ $t-\varepsilon$ のディスクに 2 重に写像されるようにする (図 7.58)．$M_{t+\varepsilon}^*$ まですでにハンドル分解ができているものとして，U_p は $M_{t+\varepsilon}^*$ に接触していないので，$M_{t+\varepsilon}^*$ に 0-ハンドル U_p を加えて $M_{t-\varepsilon}^*$ のハンドル分解となる．

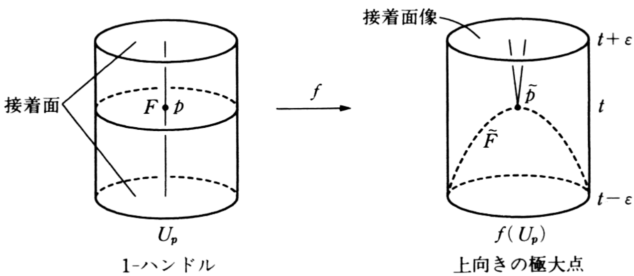


図 7.59

高さ t に $\widetilde{F}$ の極大点 $\widetilde{p}$ があり，$\widetilde{p}$ の折返しが上向きのときは，折返し点 $p(f(p)=\widetilde{p})$ の十分小さな円柱近傍 U_p をとり，上底，下底は高さ $t+\varepsilon$ のディスクに同相に

写像され，折返し面 $F(f(F)=\widetilde{F})$ は上底，下底の中間にある (図 7.59). U_p は上底，下底で $M^*_{t+\varepsilon}$ に接着する 1-ハンドルとなるが，$M^*_{t+\varepsilon}\cup U_p$ は $M^*_{t-\varepsilon}$ と同相なので，$M^*_{t-\varepsilon}$ に 1-ハンドルを加えて $M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解を得る.

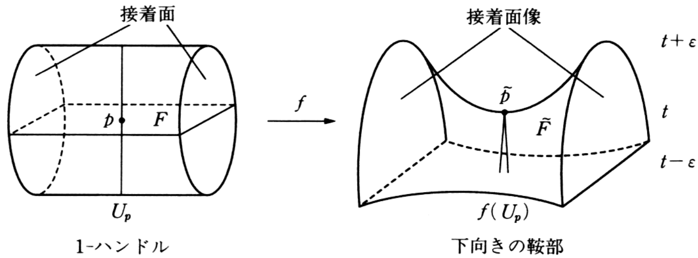


図 7.60

高さ t に $\widetilde{F}$ の鞍部 $\widetilde{p}$ があり，$\widetilde{p}$ での折返しが下向きとする．折返し点 p の十分小さい軸が水平の円柱近傍 U_p をとり，折返し面 F $(f(F)=\widetilde{F})$ は水平とする (図 7.60). U は底面の 2 つのディスクを接着面とする 1-ハンドルとし，$M^*_{t+\varepsilon}$ にこの 1-ハンドル U_p を加えて $M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解としてよい．なぜなら，$\mathrm{cl}\,(M^*_{t-\varepsilon}-U_p)$ は $M^*_{t+\varepsilon}$ と同相で，$\mathrm{cl}\,(M^*_{t-\varepsilon}-U_p)$ に U_p を 2 つのディスクで接着して $M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解を得るからである.

高さ t に $\widetilde{F}$ の鞍部 $\widetilde{p}$ があり，$\widetilde{p}$ での折返しが上向きとする．折返し点 p の十分小さい軸が水平の円柱近傍 U_p をとり，折返し面 F は水平とする (図 7.61). U_p は側面 (アニュラス) を接着面の 2-ハンドルとなり，接着面像は $t+\varepsilon$ の高さにある長方形で，接着面が 2 重に写像されている．$M^*_{t+\varepsilon}\cup U_p$ は $M^*_{t-\varepsilon}$ と同相なので，$M^*_{t+\varepsilon}$ に 2-ハンドル U_p を加えて $M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解を得る.

高さ t に $\widetilde{F}$ の極小点 $\widetilde{p}$ があり，$\widetilde{p}$ での折返しが下向きとする．折返し点 p の十分小さい円柱近傍 U_p をとり，U_p の側面 (アニュラス) が接着面で，折返し面 F は接着面に横断的に交わっている (図 7.62). 接着面像は高さ $t+\varepsilon$ にアニュラスで接着面が 2 重に写像されている．$M^*_{t+\varepsilon}\cup U_p$ は $M^*_{t-\varepsilon}$ と同相なので，$M^*_{t+\varepsilon}$ に 2-ハンドルを加えて $M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解を得る.

高さ t に $\widetilde{F}$ の極小点 $\widetilde{p}$ があり，$\widetilde{p}$ の折返しが上向きとする．折返し点 p の十分

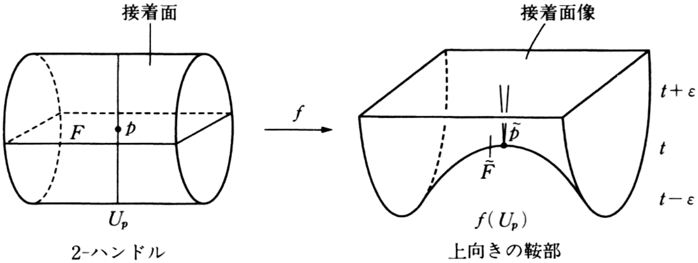


図 7.61

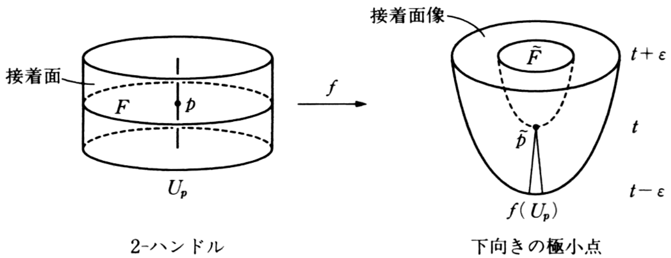


図 7.62

小さい球近傍 U_p をとり，U_p の境界 ∂U_p が接着面で，$t+\varepsilon$ の高さにある接着面像のディスクに 2 重に写像されている (図 7.63)．接着面が 2-球面なので，$M^*_{t+\varepsilon}$ に 3-ハンドル U_p を加えて，$M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解ができる．

高さ t に分岐曲線像の極大点 $\tilde{b}$ があるときは，分岐点 b の十分小さい円柱近傍 U_b をとり，分岐線は U_b の側面と垂直に交わるようにして，$f(U_b)$ は半球形で底面は $t-\varepsilon$ の高さにあるディスクとし，U_b の上底，下底は $f(U_b)$ の半球面に同相に写像されるようにする (図 7.64)．U_b は cl $(M^*_{t-\varepsilon}-U_b)$ に上底と下底で接着しているので 1-ハンドルであるが，cl $(M^*_{t-\varepsilon}-U_b)$ は $M^*_{t+\varepsilon}$ に同相なので，$M^*_{t+\varepsilon}$ に 1-ハンドルを加えて $M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解を得る．

高さ t に分岐曲線像の極小点 $\tilde{b}$ があるときは，分岐点 b の十分小さい円柱近傍 U_b をとり，分岐線は U_b の側面と垂直に交わるようにして，$f(U_b)$ は半球形で，底面のディスクは高さ $t+\varepsilon$ にある．U_b は側面 (アニュラス) で $M^*_{t+\varepsilon}$ に接着してい

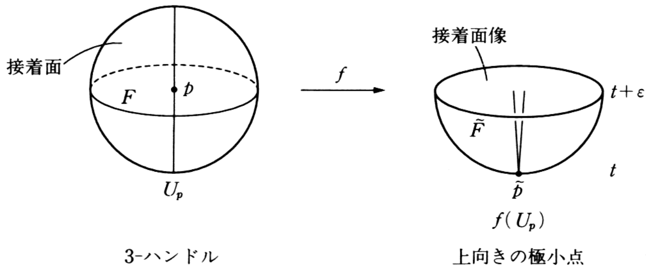


図 7.63

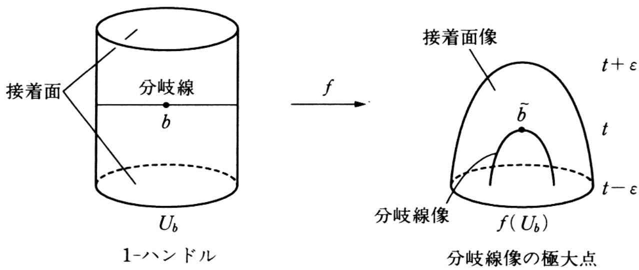


図 7.64

るので 2-ハンドルである (図 7.65). 接着面である U_b の側面は f により $f(U_b)$ の底面に 2 重に写像される. このとき, 側面と分岐線の交点の 2 点は分岐点の γ -対となっている. $M^*_{t+\varepsilon} \cup U_b$ は $M^*_{t-\varepsilon}$ と同相なので, $M^*_{t+\varepsilon}$ に 2-ハンドルを加えて $M^*_{t-\varepsilon}$ のハンドル分解を得る.

N の 3-ハンドルの高さ t に折返し分岐点 q があるときは, いくつもの場合があるし, 図も折返し曲面, 分岐曲線が q に集中していて描き難い. したがって証明も図も簡略にしておく. 要するに接着面が空集合, 2 つのディスク, アニュラス, 2-球面のいずれかにより M のそれぞれ 0,1,2,3-ハンドルが生ずるのであるから, 接着面あるいは接着面像の状況説明を証明や図の中心にする.

折返し分岐点像 $\widetilde{q}$ の近傍は図 7.66 のように大小の 2 つのループからなる折返し閉曲線と小さなループの中にある正と負の分岐点 (δ-対) 像を底とし, $\widetilde{q}$ を頂点と

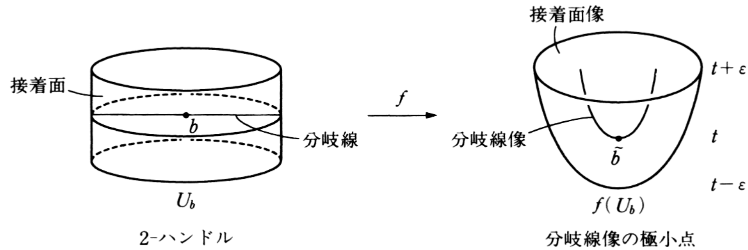


図 7.65

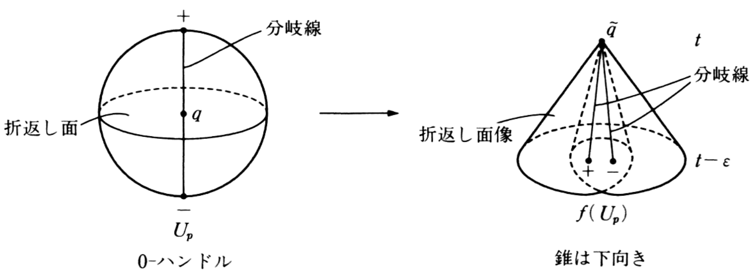


図 7.66　0-ハンドル

する錐 ($\tilde{q}$ とのジョイン) である．錐が $\tilde{q}$ より下 (上) にあるとき，錐は**下 (上) 向き**といい，それ以外のときは**横向き**ということにする．図は下向きの場合であるが，接着面は存在しないので，M の 0-ハンドルが生じる．

高さ t に $\tilde{q}$ があって錐が横向きのときは，接着面像を明確にするために，錐から $t+\varepsilon$ より上の折返し曲面像を切り取った図形で考える．分岐曲線は 3 つの場合があるので描いてない (図 7.67)．接着面像は高さ $t+\varepsilon$ の面上にあるので，像は接着面像だけを平面的に描く．底のループの交点は t より上でも下でも同じである．

分岐線像が 2 つとも下向きで接着面像には分岐点像がないときは，q の円柱近傍がとれて，その 2 つの底面 D_1, D_2 が接着面となるので，M に 1-ハンドルが生じる (図 7.68)．$R_1 = \partial D_1, R_2 = \partial D_2$ はそれぞれが 2 重に t の高さにある直線上に写像されているが，像は異なる 4 つの弧に描いてある．

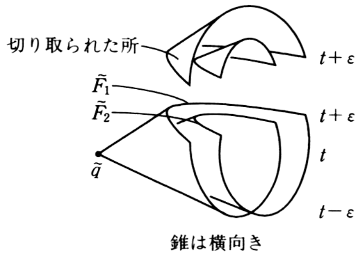


図 7.67 折返し曲面像

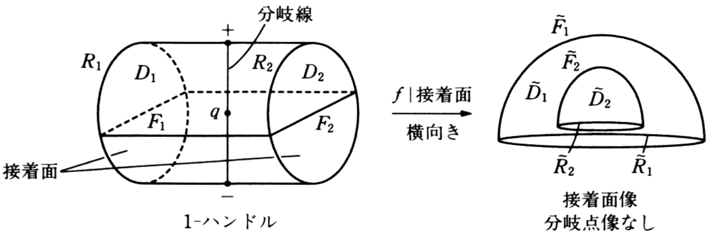


図 7.68

正の分岐線像のみ上向き (下向きでも同じ) のときは，q の球近像 U_p が存在し，∂U_p のディスク D が接着面となる．D は t の分岐点と折返し弧 F_1, F_2 を含む，∂D は図 7.69 のように弧 R_1, R_3, R_2, R_4 に折返し点で分かれている．3-球 U_p が ∂U_p のディスク D で接着してもハンドル分解は変化しないので，ハンドルを加える必要がない．

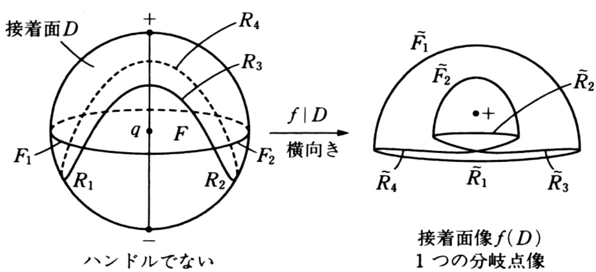


図 7.69

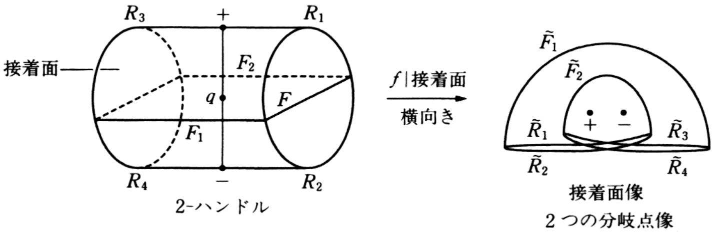


図 7.70

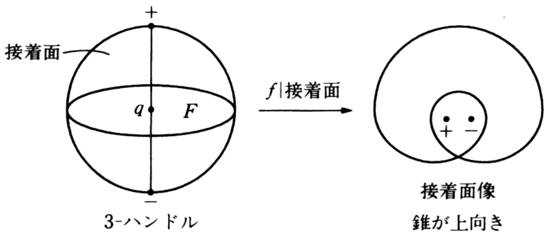


図 7.71

正負の分岐線像が 2 つとも上向きのときは，q の円柱近傍が存在し，円柱の側面 (アニュラス) が接着面となるので，M に 2-ハンドルが生じる．

錐が上向きのときは，折返し分岐点 q の球近傍 U_p をとると，∂U_p (2-球面) が接着面となるので，M に 3-ハンドルが生じる (図 7.70).

t が 0 に達すると $M^*_{0-\varepsilon}$ に重心 (o, o) の幾何的写像度の個数の 3-ハンドルが加わる (図 7.71). ■

【定理 7.14】 M, N が閉 n -多様体 $(n = 1, 2, 3)$ で，$f : M \to N$ が良い写像であれば，N のハンドル分解から f のハンドル分解が生じる．

証明　命題 7.10 , 7.11 , 7.12 , 7.13 を総合すれば証明となる．$n = 1, 2$ の場合の証明は $n = 3$ の場合より簡単なので問題とする．$n = 3$ のときの証明を表にして示す．多様体が向きづけ不可能な場合でもこの定理は成立する．折返し分岐点の近傍の分岐線に正負の区別をしたが，これはあくまで近傍だけの局所的な向きで

あって，多様体全体の向きではない．

N の 0-ハンドル	⇒	M の 0-ハンドル	(命題 7.10)
N の 1-ハンドル　(命題 7.11)			
コアの下向きの折返し点像	⇒	M の 0-ハンドル	
コアの上向きの折返し点像	⇒	M の 1-ハンドル	
コアの重心	⇒	M の 1-ハンドル	
N の 2-ハンドル　(命題 7.12)			
コアの折返し線像の下向きの極大点	⇒	M の 0-ハンドル	
コアの折返し線像の上向きの極大点	⇒	M の 1-ハンドル	
コアの折返し線像の下向きの極小点	⇒	M の 1-ハンドル	
コアの折返し線像の上向きの極小点	⇒	M の 2-ハンドル	
コアの分岐点像	⇒	M の 1-ハンドル	
コアの重心	⇒	M の 2-ハンドル	
N の 3-ハンドル　(命題 7.13)			
折返し線像の下向きの極大点	⇒	M の 0-ハンドル	
折返し線像の上向きの極大点	⇒	M の 1-ハンドル	
折返し線像の下向きの鞍部	⇒	M の 1-ハンドル	
折返し線像の上向きの鞍部	⇒	M の 2-ハンドル	
折返し線像の下向きの極小点	⇒	M の 2-ハンドル	
折返し線像の上向きの極小点	⇒	M の 3-ハンドル	
分岐線像の極大点	⇒	M の 1-ハンドル	
分岐線像の極小点	⇒	M の 2-ハンドル	
折返し分岐点像の錐が			
下向き	⇒	M の 0-ハンドル	
横向き｛上向きの分岐線像 0	⇒	M の 1-ハンドル	
横向き｛上向きの分岐線像 1	⇒	M のハンドルなし	
横向き｛上向きの分岐線像 2	⇒	M の 2-ハンドル	
上向き	⇒	M の 3-ハンドル	
重心	⇒	M の 3-ハンドル	

■

問題 7.6　定理 7.13 ($n=1$) を証明せよ．

問題 7.7　定理 7.13 ($n=2$) を証明せよ．

7.9 写像度が 0 でない連続写像 $f: S^3 \to N^3$

21 世紀で解いてほしい問題を提起しておく.

問題 7.8 有向閉 3 次元多様体 N^3 へ S^3 から，写像度 0 でない連続写像 $f: S^3 \to N^3$ があるとき，N^3 は何物か？

この問題で N^3 が単連結であれば 3 次元ポアンカレ予想となる．定理 7.3 より f は ε-ホモトピーにより良い写像の近似をもつので，f は始めから良い写像とする．良い写像の定義の特徴はシンギュラリティーが折返し曲面と，分岐曲線であることにある．局所的にみると，折返しは面対称の 2 点を 1 点に写像し，分岐は線対称の 2 点を 1 点に写像する．したがって f は局所的には 2 重写像である．S^3 は**最高の対称性** をもった空間である．3 次元ポアンカレ予想を攻略するには，S^3 の対称性から，f の**局所的 2 重の対称性**を用いて，N^3 の対称性を導びき出さねばならない．本節では，$f: S^3 \to N^3$ が写像度が 2 の良い写像であるときの N^3 の構造を論じる．

つぎの補題で良い写像 $f: S^3 \to N^3$ が与えられれば，普遍被覆 $h: \widetilde{S}^3 \to N^3$ とシンギュラリティーが f と一致する良い写像 $g: S^3 \to \widetilde{S}^3$ が存在し，f は g と h の積に分解することを示す．

【**補題 7.15**】 N^3 は閉 3-多様体，$f: S^3 \to N^3$ は良い写像，$h: \widetilde{S}^3 \to N^3$ を**普遍被覆**とする．f とシンギュラリティーの等しい良い写像 $g: S^3 \to \widetilde{S}^3$ が存在し，$f = h \circ g$ を満たす．

証明 S^3 は単連結だから f の持上げ $g: S^3 \to \widetilde{S}^3$ が存在し，$f = h \circ g$ を満たす．f は良い写像であるから，S^3 の各点 p と $h^{-1}(f(p))$ の各点 $q = g(p)$ に対し，良い写像の定義 7.1 の座標近傍が存在する．その座標近傍の中の十分小さな単位球 U_p をとると，h は被覆であるから $h|\,g(U_p) : g(U_p) \to f(U_p)$ は同相写像となる．ゆえに g と f のシンギュラリティーは一致し，g も良い写像となる． ■

もしも 3 次元ポアンカレ予想が肯定的に解決すれば，$\widetilde{S}^3 = S^3$ であるから本節の初めに提起した問題は良い写像 $g: S^3 \to S^3$ と普遍被覆 $h: S^3 \to N^3$ の研究を

すればよいことになる．3次元ポアンカレ予想の解決を急がねばならない．良い写像 $g: S^3 \to \widetilde{S}^3$ が与えられたとき g の折返し曲面は β-トリックで解消できると思う．これが実現できれば，残りは分岐曲線のみである．つぎの定理はシンギュラリティーが分岐曲線のみの場合で，スミス (Smith) の定理，スミス予想の結果を用いて証明するが，本当はこのような大定理を使わずに証明できるのでないかと思っている．

この節では f をシンギュラリティーが分岐曲線のみの良い写像とする．

【定理 7.16】 $f: S^3 \to N^3$ が写像度 2 で分岐をもつならば N^3 は S^3 である．

証明　$g: S^3 \to S^3$ をつぎのように定義する．$p(\in S^3)$ が分岐点であるときは $g(p) = p$，p が分岐点でないときは $f(p') = f(p)$ $(p' \neq p)$ を満たす p' が一意的に定まるから，$g(p) = p', g(p') = p$ と定める．g は分岐点を不動点とする自己同相写像で，$g^2 = \mathrm{id}, f \circ g = f$ である．g は S^3 の周期が 2 の周期的自己同相写像であるからスミスの定理より分岐点集合は結び目 K である．スミス予想は肯定的に解決しているから，K は自明であり，N^3 は S^3 である．■

【定理 7.17】 $f: S^3 \to N^3$ が写像度 2 で，分岐をもたなければ，N^3 は**射影空間** P^3 である．

証明　f は分岐をもたないから，写像度 2 の普遍被覆である．S^3 の任意の点 p に対し，p' $(\neq p)$ が一意的に定まり $f(p) = f(p')$ を満たすから，$g(p) = p', g(p') = p$ と定義すると，$g: S^3 \to S^3$ は不動点をもたない自己同相写像であり，$g^2 = \mathrm{id}$，$g \circ f = f$ を満たす．$h: S^3 \to [0,1]$ を S^3 の高さ関数とし，$h^{-1}(0) = s, h^{-1}(1) = n = g(s)$ を南極，北極，$h^{-1}(t) = S_t$ $(t \neq 0,1)$ を等高球面，$h^{-1}([0,t]) = B_t, h^{-1}([t,1]) = B_t^c$ とおき，$g(S_t) = \widetilde{S}_t, g(B_t) = \widetilde{B}_t, g(B_t^c) = \widetilde{B}_t^c$ と書くと，つぎの図式が成立する．

$$B_t \overset{g}{\circlearrowleft}\!\!\bigcap \widetilde{B}_t \qquad B_t^c \overset{g}{\circlearrowleft}\!\!\bigcap \widetilde{B}_t^c \qquad B_t \cap \widetilde{B}_t^c \underset{\longleftarrow}{\overset{g}{\longrightarrow}} B_t^c \cap \widetilde{B}_t$$

t が動くとき $S_t \cap \widetilde{S}_t$ がどのように変化するかを知ることが重要である．図 7.72

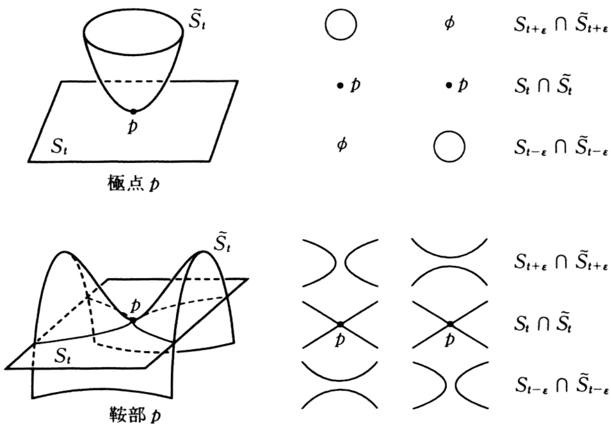


図 7.72

のような極点と鞍部を**臨界点**とよび，そのときの t を**臨界値**という．

極点では S_t と $\widetilde{S}_t$ でインナーモストな S^1 が生じたり消えたりする．鞍部では，1 つの臨界値 τ を除いて，1 つの S^1 (インナーモストとは限らない) が 2 つに分離したり，2 つの S^1 がつながって 1 つになったりする．ある臨界値 t で $S_t \cap \widetilde{S}_t$ に臨界点 p があれば，$g| S_t \cap \widetilde{S}_t$ は不動点をもたない自己同相写像であるから，$p' = q(p)$ も臨界点で $p \neq p'$ である．$\{p, p'\}$ を対の臨界点とよぶ．

f を ε-アイソトピーで修正し，S_t と $\widetilde{S}_t$ は臨界点以外で**横断的**で

(a) $\widetilde{S}_t$ $(0 < t < 1)$ は S^3 の滑らかな曲面であり，

(b) 臨界値は $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$ のみで，各 t_i において，$S_{t_i} \cap \widetilde{S}_{t_i}$ は g で互いに写像される 1 対の臨界点を含み，

(c) $\widetilde{S}_{t+\varepsilon}(S_{t-\varepsilon})$ の極点と鞍部が $S_t \cap \widetilde{S}_t$ の 1 点 p で図 7.73 のように消えることはない ($S_t \cap \widetilde{S}_{t'}, t \neq t'$, ではあってもよい) ようにする．

定理 7.17 の証明の中心は，つぎの条件 (i)，(ii)，(iii)，(iv) を満たす臨界値 τ と τ における鞍部の対 $w, w' = g(w)$ の存在を示すことにある．

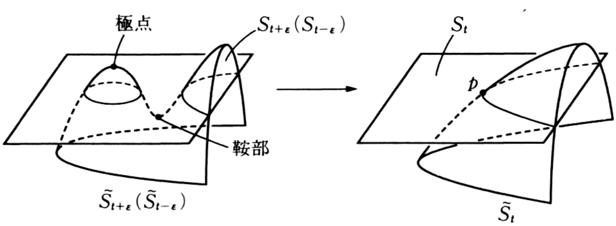


図 7.73

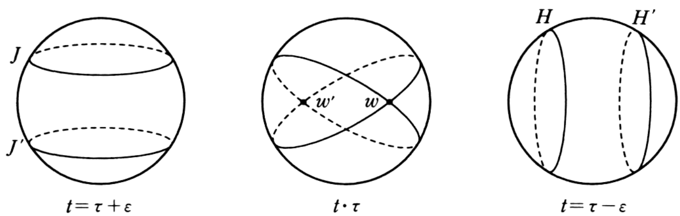


図 7.74　$S_t(\widetilde{S}_t)$ の図

(i) τ の直前 $\tau-\varepsilon$ の $S_{\tau-\varepsilon}\cap\widetilde{S}_{\tau-\varepsilon}$ の S^1 の対 $J, J'=g(J)$ が，τ において，鞍部の対 $w, w'=g(w)$ でつながり，直後の $\tau+\varepsilon$ で S^1 の対 $H, H'=g(H)$ となる (図 7.74).

(ii) 任意の $0<t<1$ に対し $S_\tau\cap\widetilde{S}_\tau$ の w, w' を含む連結成分以外の $S_t\cap\widetilde{S}_t$ の連結成分は対になっていて，g により互いに写像される.

(iii) 任意の $t\neq\tau$ に対し，$S^3-S_tU\widetilde{S}_t$ の連結成分は奇数個で，1つの連結成分 K_t のみ g により自分自身に写像され，K_t 以外の連結成分は対になっていて互いに g で写像される.

(iv) $0<t<\tau$ において，$K_t\subset B_t^c\cap\widetilde{B}_t^c$ で t とともに縮小する. $\tau<t<1$ において，$K_t\subset B_t\cap\widetilde{B}_t$ で t とともに拡大する.

τ の存在を示すために，$t=0$ から出発して t を増大させながら，τ, w, w' を見いだす.

図 7.75 の上の図は K_t の最初と最後を表している．球面 S_t の内側が B_t で，球面 $\widetilde{S}_t$ の外側が $\widetilde{B}_t$ である．$t = \varepsilon$ で $K_t = \mathrm{Int}(B_t^c \cap \widetilde{B}_t^c), t = 1 - \varepsilon$ で $K_t = \mathrm{Int}(B_t \cap \widetilde{B}_t)$ である．もちろん (i)，(ii)，(iii)，(iv) を満たしている．

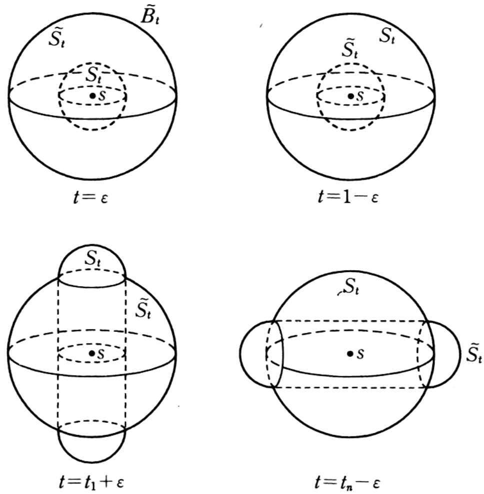


図 7.75

図 7.75 の下の図は最初の臨界値 t_1 の直後と最後の臨界値 t_n の直前の K_t の図である．t_1, t_n の臨界点はともに極点で，t_1 で対の S^1 が生じ，t_n で対の S^1 が消える．$t_1 + \varepsilon, t_n - \varepsilon$ でもそれぞれ $K_t = \mathrm{Int}(B_t^c \cap \widetilde{B}_t^c), K_t = \mathrm{Int}(B_t \cap \widetilde{B}_t)$ である．ただし $t = t_1 + \varepsilon(t_n - \varepsilon)$ におけるソリッドトーラス $B_t U \widetilde{B}_t$ $(B_t^c U \widetilde{B}_t^c)$ は自明とは限らない．しかし，$0 < t < t_2, t_{n-1} < t < 1$ においても (i)，(ii)，(iii)，(iv) は満たされている．

$0 < t < t_i$ を満たす t で性質 (ii)，(iii)，(iv) は満たされているとする．

(a)　t_i の臨界点対が極点で，$t_i + \varepsilon$ に S^1 が生じる場合を考える．図 7.76 のようなことはありえない．なぜなら B_t は単調に拡大し，$\widetilde{B}_t^c$ は単調に縮小するからである．図 7.77 の 3 つの図はいずれも $t = t_i$ に極点があって，$t = t_i + \varepsilon$ に S^1 が生じる場合であるが，3 つともありうる．K_t は $B_t^c \cap \widetilde{B}_t^c$ とともに単調に縮小し，t_i における極点が K_{t_i} から離れているときはもちろん，図 7.77 のように cl (K_{t_i})

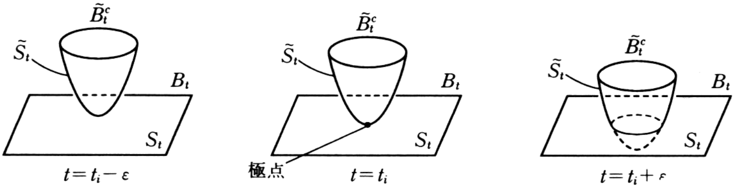


図 7.76

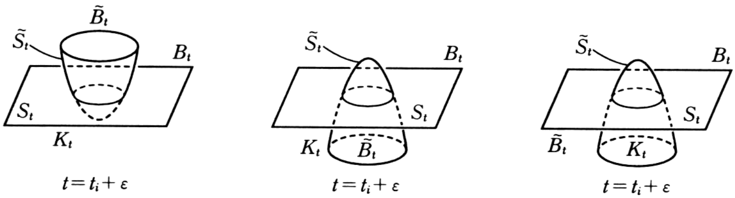


図 7.77

上にあるときも $t=t_i+\varepsilon$ まで K_t は定まり，条件を満たす．

(a$'$)　t_i の臨界点対が極点で，$t=t_i-\varepsilon$ の S^1 が消えるときも 3 つの場合があるが，消える $S^3-S_tU\widetilde{S}_t$ の連結成分は対の開球で K_t ではなく，(a) と同様に $t=t_i+\varepsilon$ でも条件は満たされる．

(b)　t_i の臨界点対が鞍部 v,v' で $t=t_i-\varepsilon$ の $S_t\cap S'_t$ に 2 対の $S'\{J_1,J'_1=g(J_1)\},\{J_2,J'_2=g(J_2)\}$ があって，t_i において $J_1(J'_1)$ と $J_2(J'_2)$ が $v(v'=g(v))$ で結ばれ，$t=t_i+\varepsilon$ において 1 対の $S^1\{H,H'=g(H)\}$ となるとき，図 7.78 の場合

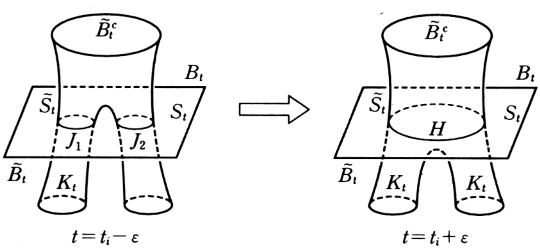


図 7.78　ありえない場合

は $B_t, \widetilde{B}_t$ が拡大するものでありえない．もしあったとすると，図のように $t = t_i - \varepsilon$ から $t = t_i + \varepsilon$ に進んだとき K_t は縮小しない．しかし生じる 3 つの場合では K_t は縮小し $t = t_i + \varepsilon$ においても条件は満たされる．

(b')　(b) と逆で t_i における S^1 の対 $\{J, J' = g(J)\}$ が，t_i の鞍部 v $(v' = g(v))$ により 2 対の $S'\{H_1, H_1' = g(H_1)\}, \{H_2, H_2' = g(H_2)\}$ に分離されるときも，3 つの場合に分かれるが図 7.79 以外の 2 つの場合は明らかに条件が満たされる．図 7.79 の場合は $t = t_i + \varepsilon$ で K_t は大きく縮小するが，S^1 の 1 対，たとえば $\{H_1, H_1'\}$ は cl (K_t) 上に残り，$\{H_2, H_2'\}$ は cl (K_t) に含まれない．しかし，この場合も K_t は g により自分自身に写像され，条件を満たす．

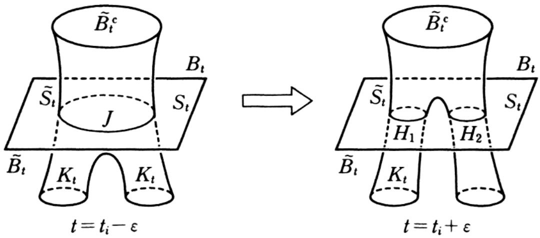


図 7.79

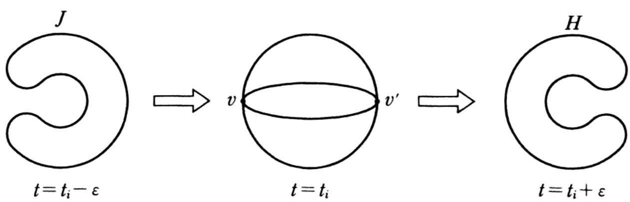


図 7.80　ありえない

τ, w, w' の存在を示す前に，図 7.80 のように $t = t_i - \varepsilon$ における $S_t \cap \widetilde{S}_t$ の閉曲線 J に t_i で鞍部対 $v, v' = g(v)$ が生じ，$t = t_i + \varepsilon$ で閉曲線 H となることはない．理由は，その場合 $J = g(J)$ となり，$t = t_i - \varepsilon$ で (ii) が満たされない．

(c)　$t = t_i$ に鞍部対 $\{v, v' = g(v)\}$ があり，$t = t_i - \varepsilon$ において S^1 の対 $\{J, J' = g(J)\}$ が v, v' でつながって，$t = t_i + \varepsilon$ で S^1 の対 $\{H, H' = g(H)\}$ となるときは (図 7.81)，$\tau = t_i, w = v, w' = v'$ とおく．$t = \tau - \varepsilon$ に $S_t - \widetilde{S}_t, \widetilde{S}_t - S_t$ のそれぞれの連結成分 $G, \widetilde{G}$ で $\partial G \supset J, J', \partial\widetilde{G} \supset J, J', g(G) = \widetilde{G}, g(\widetilde{G}) = G$ となるものがあるから，$g(K_t) = K_t$ より $\partial K_t \supset G, \widetilde{G}$ を満たす．したがって $t = \tau + \varepsilon$ において，$S_t - \widetilde{S}_t$ のそれぞれの連結成分 $F, \widetilde{F}$ が存在し，$\partial F \supset H, H', g(F) = \widetilde{F}, g(\widetilde{F}) = F$ を満たす．ゆえに $S^3 - S_t \cup \widetilde{S}_t\ (t = \tau + \varepsilon)$ の連結成分 K_t で，$g(K_t) = K_t, \partial K_t \supset F, \widetilde{F}$ を満たすものが存在する．$t = \tau - \varepsilon$ で $K_t \subset B_t^c \cap \widetilde{B}_t^c$ であるから，$t = \tau + \varepsilon$ では $K_t \subset B_t \cap \widetilde{B}_t$ を満たす．

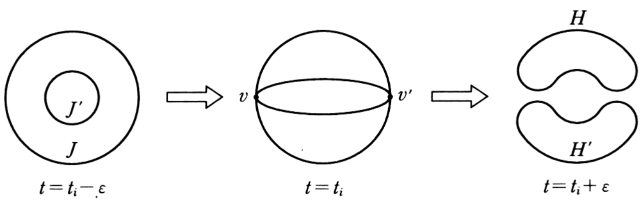


図 7.81　$\tau = t_i$ とおく

$t = 1 - \varepsilon$ において $K_t = \mathrm{Int}(B_t \cap \widetilde{B}_t)$ であり，$B_t^c \cap \widetilde{B}_t^c$ が単調に縮小するから，τ は必ず存在する．$B_t \cap \widetilde{B}_t$ が単調に拡大するとともに K_t も拡大し，τ のような臨界値は二度と生じない．$t = \tau - \varepsilon$ おいて条件 (i)，(ii)，(iii)，(iv) が満たされているから，$t = \tau + \varepsilon$ でも条件 (i)，(ii)，(iii)，(iv) は満たされ，$\tau < t < 1$ においても $0 < t < \tau$ と同じように証明が継続され，すべての $0 < t < 1$ において，条件 (i)，(ii)，(iii)，(iv) が成立する．

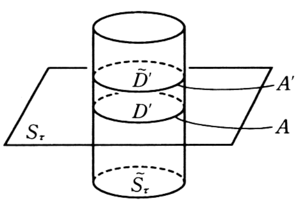


図 7.82

S^3 の高さ関数を修正して，臨界値は τ のみにしよう．S_τ ($\widetilde{S}_\tau$) でインナーモストな $S_\tau \cap \widetilde{S}_\tau$ の S^1 を A ($\widetilde{A} = g(A)$) とし，A ($\widetilde{A}$) を貼る $S_\tau(\widetilde{S}_\tau)$ のディスク D ($\widetilde{D} = g(D)$) とする．$D \cap \widetilde{S}_\tau = A$ ($\widetilde{D} \cap S_\tau = \widetilde{A}$) を満たす．$D$ ($\widetilde{D}$) の近傍に D ($\widetilde{D}$) に平行にディスク D' ($\widetilde{D}'$) を $D' \cap \widetilde{S}_\tau = A'$ ($\widetilde{D}' \cap S_t = \widetilde{A}'$) となるように貼る (図 7.82)．ただし $\widetilde{S}_\tau(S_\tau)$ で $D'(\widetilde{D}')$ は $w \cup w'$ と $A(\widetilde{A})$ を分離しているものとする．$\widetilde{S}_\tau - A'(S_\tau - \widetilde{A}')$ の $w \cup w'$ を含む部分に $D'(\widetilde{D}')$ を貼りつけた球面を $\widetilde{S}'_\tau(S'_\tau)$ とする．$S'_\tau \cap \widetilde{S}'_\tau$ は $S_\tau \cap \widetilde{S}_\tau$ より連結成分の S^1 (少なくとも $A, \widetilde{A}$) が減っている．さらに $S'_\tau, \widetilde{S}'_\tau$ に同様の切り貼りを続け，そのたびに S^3 の高さ関数を修正し，臨界値，臨界点を減らしていく．

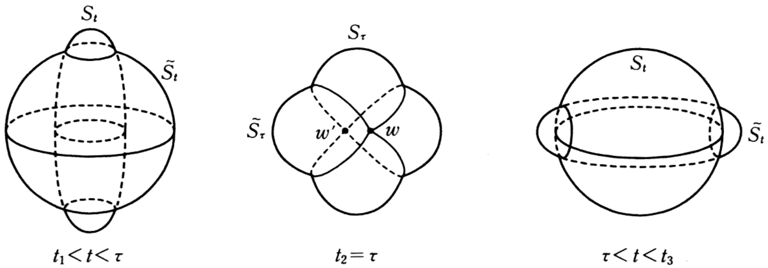


図 7.83

最後に図 7.83 のように臨界値 t_1 に 1 対の極点，$t_2 = \tau$ に 1 対の鞍部 w, w'，t_3 に 1 対の極点をもつ S^3 の高さ関数を得る．ここまでくれば $B_{t_1} \cup \widetilde{B}_{t_1}, B^c_{t_3} \cup \widetilde{B}^c_{t_3}$ は S^3 の中で自明である．このあとの修正は一般の位置ではなくなるが $t_1 = t_2 = t_3 = \dfrac{1}{2}$ とし，$g(S_t) = \widetilde{S}_{1-t}, 0 \leq t \leq 1$ となるように高さ関数を S^3 に入れ，さらに S^3 を $\mathbf{R}^4$ の単位球面 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ となるように $\mathbf{R}^4$ を埋め込み，

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$$

を満たすようにすることは容易である．ゆえに N^3 は射影空間 P^3 である．■

定理 7.16，定理 7.17 の証明にはもちろん f が 2 重であることが強く効いている．私は 2 重写像の研究が重要と考えている．なぜならば，良い写像は局所的には 2 重写像を用いて定義しているからである．

問題 7.9　折返しをもたず，1つの自明な分岐曲線をもち，写像度が4の良い写像 $f: S^3 \to P^3$ (P^3 は射影空間) をつくれ．

7.10　21世紀へのプラン

21世紀のことを語れば鬼が大笑いするに違いないが，「21世紀の数学」の講座である以上21世紀に触れないわけにいかない．良い写像は4次元以上の高次元多様体でも定義できている．しかし $m \geq 4$ の場合，n 次元多様体の間の連続写像を良い写像で近似できるとは思えない．たとえば $n = 4$ のとき，良い写像のシンギュラリティーは折返し3-多様体，分岐曲面，折返し分岐曲線である．連続写像を近似するためには，良い写像のシンギュラリティーのほかに本質的なシンギュラリティー (おそらく曲線) が存在するような気がする．高次元でも非退化PL写像で近似可能である．非退化PL写像 $f: M^4 \to N^4$ が与えられたとき，7.3節の手法により M^4 の単体分割の頂点以外では良い写像に修正できるから，補題7.6の $n = 4$ の場合が問題となる．すなわち3-球面どうしの良い写像を4-球どうしの良い写像に拡張するための**オブストラクション** (obstruction) は何かということであり，これが解決すれば，付加するシンギュラリティーも自ずから定まるであろう．

異なる次元の多様体の間の連続写像 $f: M^m \to N^n$ をできるだけきれいな写像で近似する問題も重要である．$m < n$ の場合は望みがある．たとえば $m = 2, n = 3$ の場合，図7.84 (本章でたびたびでてきた図である) の自己交叉曲線の終点 $\widetilde{p}$ に写

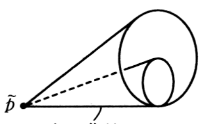


図 7.84　交叉曲線

像される点 p ($\widetilde{p} = f(p)$) が唯一のシンギュラリティーでそれ以外の点ではすべて滑らかに写像できる．$m = 3, n = 4$ の場合も何とか解けそうであるが，私には解けていない．$f: M^4 \to N^4, f: M^3 \to N^4$ 等の問題は4次元のポアンカレ予想，基

本予想，三角形分割問題に直接関係していると思う．

$m > n$ の場合はまったく見当がつかない．連続写像 $f : M^m \to N^n$ が与えられたとき，N^n の点 q の逆像の集合 $\{f^{-1}(q)\}$ をできるだけ見やすくするために，$f^{-1}(g)$ の構造を調べ，それらの並び方を揃える方法を探さねばならない．

40 年以上昔であるが，3 次元多様体の基本予想，三角形分割問題を考えたことがあった．その手法を基本予想を例として述べると，$f : M^3 \to N^3$ を PL 3-多様体 M^3 から PL 3-多様体 N^3 への同相写像が与えられたとき，f を非退化 PL 写像 $g : M^3 \to N^3$ で近似し，g のシンギュラリティーを消して M^3 と N^3 の PL 同相性を示そうという計画であった．このプランは写像度が 0 でない連続写像 $f : S^3 \to N^3$ が与えられたとき，N^3 の構造を研究するという計画となって続いている．本章の主定理 7.3 を用いると，f は良い写像としてよいから，f は S^3 の折返し曲面と分岐曲線をシンギュラリティーにもつ被覆写像とみなせる．

f の折返し曲線を消す操作の中心は **β-トリック**という単純な手法である．1 次元なら実関数 $y = f(x)$ をホモトピックに変化させて隣り合う極大点 (下向きの折返し点) と極小点 (上向きの折返し点) をキャンセルすることである．β-トリックを行うとこの極大値と極小値の間の開区間 ($\subset y$ 軸) 上の点の幾何的写像度は 2 だけ減る．この極大点と極小点のキャンセルを 3 次元に拡張したのが β-トリックである．図 7.85 は隣り合う折返し曲面像が β-トリックを受けると円柱の側面で連ながり，円柱の上底と下底は除かれて新しい折返し曲面の像が生じ，同時に新しい分岐曲線の像も加わる．β -トリックの有効性は円柱の内部の点の幾何的写像度が 2 だけ減ることと，ホモトピックな操作であることである．折返し曲面を消すには β-トリック以外の操作も必要となるが，それらの土台は β-トリックである．

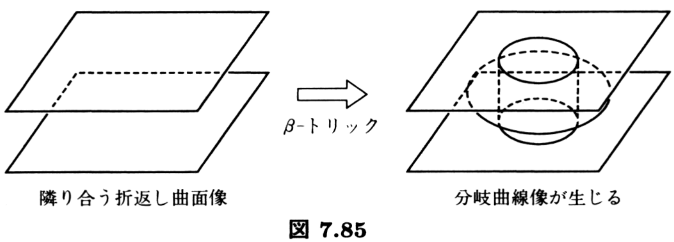


図 7.85

折返し曲面は解消できて，$f: S^3 \to N^3$ のシンギュラリティーは分岐曲線のみとなったとしよう．シンギュラリティーは分岐曲線 $L_1, \cdots, L_n$ $(n \geq 0)$ のみとなり，f は分岐被覆である．補題 7.15 により，単連結な 3-多様体 $\widetilde{S}^3$，**普遍被覆** $h: \widetilde{S}^3 \to N^3$，$f$ と分岐曲線が一致する**分岐被覆** $g: S^3 \to \widetilde{S}^3$ が存在する．3 次元ポアンカレ予想が肯定的に解決すれば，N^3 の研究は普遍被覆 $h: S^3 \to N^3$ を明らかにすることに帰着する．普遍被覆 $h: S^3 \to N^3$ をもつ N^3 としてレンズ空間はよく知られているが，レンズ空間以外のそのような空間はどのようなものだろうか．

3次元ポアンカレ予想は「$\widetilde{S}^3$ は単連結で，シンギュラリティーが分岐曲線 $L_1, \cdots, L_n$ のみの良い写像 (分岐被覆) $h: S^3 \to \widetilde{S}^3$ があれば，$\widetilde{S}^3$ は S^3 であろう」という予想と同値と思っている．その理由は**絡み目** $\{L_1, \cdots, L_n\}$ は自明であろうと考えているからである．もしも絡み目が自明であれば $L_1, \cdots, L_n$ をホモトピーで近づけていき，自明な閉曲線 L に収束すると，$h: S^3 \to \widetilde{S}^3$ は L を分岐曲線とする $n+1$ 重の分岐被覆となり，L を不動とする $n+1$ 周期の **周期的写像** が S^3 に存在することとなり，**スミスの予想**と具体的に結びつく．スミス予想は肯定的に解決しているのだからこの予想も望みなきにあらずである．この予想は**世紀明けの問題**にふさわしい．やはり S^3 の等高球面 $S_t^2, 0 < t < 1$, の像 $h(S_t^2)$ の **自己交叉曲線**を研究するのが正攻法である．

参考文献

[1]　加藤十吉: 組合せ位相幾何　(岩波講座　基礎数学 6)，岩波書店 (1976)

[2]　小島定吉: トポロジー入門，21 世紀の数学 7，共立出版 (1998)

[3]　遠山　啓: 無限と連続 (岩波新書)，岩波書店 (1952)

[4]　本間龍雄: 組合せ位相幾何学 (共立全書)，共立出版 (1980)

[5]　本間龍雄: ポアンカレ予想物語 (数セミ・ブックス) 日本評論社 (1985)

[6]　矢野公一: 距離空間と位相構造，21 世紀の数学 4，共立出版 (1997)

あとがき

本書は3次元多様体に関する話題がほとんどである．数学では普通低次元は2, 3, 4次元を意味する．世間の人は低次元を低級と解釈しているようだが，とんでもない話である．3次元の世界は狭過ぎず，広過ぎず実に興味深い空間である．われわれは3次元に住む動物であるが，人類は空間の3次元性を用いて，いろいろな策略をめぐらし，世界を制覇したつもりでいるが，このまま直進すると，地球は高等な生物が住めない死の世界となる恐れがある．

空間はそれだけでは意味をもたない，その中に物が存在し，物が時間とともに変化（トポロジーではアイソトピー，ホモトピーなど）することにより空間の価値が生じる．空間の次元そのものより余次元（＝空間の次元−物の次元）のほうが大事であり，余次元が0，1，2のものがとくに重要である．高次元の空間では余次元3以上のもののはたらきは無視できる場合が多い．3次元空間内では空間自身，曲面，曲線の余次元がそれぞれ0，1，2である．とくに曲線は結び目とか絡み目とよばれ，3次元空間の面白さと難しさの原因となっている．ポアンカレ予想が高次元から解決してきて，4次元もほぼ解決し，3次元のみが未解決なのは結び目が絡んでいるかららしい．

7章以外の各章の執筆者の皆さんには，それぞれの講義や研究で忙しいのに，本書の趣旨に合うようたいへん努力していただきました．共立出版の編集部の赤城圭さん，三輪直美さんには，企画からまとめに至るまで連絡調整に一方ならずお世話になりました．本書は至って図が多く，彩色の図まであるので，図版の桃井嘉道さんにお手数をかけました．皆さんに心から感謝いたします．

索　　引

Memorandum

Memorandum

著者紹介

本間龍雄（ほんま たつお）

現在　東京工業大学名誉教授
理学博士

池田裕司（いけだ ひろし）

現在　神戸大学理学部教授
理学博士

石井一平（いしい いっぺい）

現在　慶應義塾大学理工学部助教授
理学博士

河野正晴（こうの まさはる）

現在　北見工業大学工学部教授
理学博士

津久井康之（つくい やすゆき）

現在　専修大学経営学部教授
博士(理学)

山下正勝（やました まさかつ）

現在　東洋大学工学部教授
理学修士

横山和夫（よこやま かずお）

現在　上智大学理工学部助教授
理学博士

共立講座 21 世紀の数学
第 23 巻（全 27 巻）
幾何学的トポロジー

1999 年 9 月 25 日　初版 1 刷発行

検印廃止
NDC 415.7
ISBN 4-320-01575-4

著者代表　本 間 龍 雄　© 1999

発 行 者　南 條 光 章

発 行 所　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向 4 丁目 6 番19号
電話　東京(03)3947-2511 番（代表）
郵便番号112-8700
振替口座 00110-2-57035 番
URL　http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　啓文堂

製　本　中條製本工場

社団法人
自然科学書協会
会員

Printed in Japan